



THÈSE
en vue de l'obtention du grade de Docteur, délivrée par
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

École Doctorale N° 512
École Doctorale en Informatique et Mathématiques de Lyon

Discipline : Mathématiques

Soutenue publiquement le 18 septembre 2023, par :

Corentin LE BIHAN

**Effets de bord et comportement en temps long en théorie
cinétique collisionnelle**

Devant le jury composé de :

Nathalie AYI,	Maîtresse de conférences HDR à Sorbonne Université,	Examinatrice,
Bertrand LODS,	Professore ordinario à l'Università degli studi di Torino,	Rapporteur,
Rossana MARRA,	Professore ordinario à Università degli studi di Tor Vergata,	Rapporteur,
Nicolas ROUGERIE,	Directeur de recherche CNRS à l'ÉNS de Lyon,	Examineur,
Chiara SAFFIRIO,	SNSF Eccellenza Professorship à University of Basel,	Examinatrice,
Laure SAINT-RAYMOND,	Professeure à l'Institut des Hautes Études Scientifiques,	Directrice,
Sergio SIMONELLA,	Professore associato à la Sapienza Università di Roma,	Co-directeur,
Cédric VILLANI,	Professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques,	Examineur.

Remerciements

Camarades, voici sept ans que je traîne à l'ÉNS, dont trois à L'UMPA. Il est grand temps que cela se termine. Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse.

Je voudrais d'abord remercier Bertrand Lods et Rossana Marra qui ont accepté de rapporter mon travail, ainsi que Nathalie Ayi, Nicolas Rougerie, Chiara Saffirio et Cédric Villani pour leur participation à mon jury.

Je tiens à remercier Sergio Simonella pour sa patience au cours des trois dernières années, qui a toujours accepté de relire mes très nombreux brouillons, souvent mal rédigés, sans que je n'aurais jamais pu atteindre un papier lisible. Je remercie Laure Saint-Raymond pour son enseignement des EDPs et pour m'avoir introduit à la preuve de Lanford, et cela dès la L3. Je suis reconnaissant à Laure pour les discussions mathématiques variées qui m'ont permis de progresser.

Je souhaite sincèrement remercier ma mère pour avoir élevé la huitième merveille du monde, Josselin. Josselin tu as été un frère pour moi. Je remercie aussi mon papa pour pas mal de chose. Je pense au reste de ma famille, tant du côté Le Bihan que Général, pour avoir été là, ce qui est déjà bien. Élisabeth, Michelle, Émile, Catherine, Pascal, Jean-Marc, Lise, Philippe, Marie, Anaïs, Maéva, Hoël et Sarah, merci.

Je remercie Clara, avec qui les sept dernières années où nous nous sommes côtoyés ont été très sympathique. Jules, je me souviendrai de nos discussions de politique, d'histoire et d'autres choses qui ne seront pas trop précisées. Je pense aussi à Jeanne qui a réussi à me supporter (en plusieurs sens). Merci Théodore et Marc-Éric pour votre amitié démontrée depuis de nombreuses années. Merci Héloïse et Léo pour votre hospitalité dans votre bureau lorsque ma productivité était en baisse (à savoir plus ou moins très régulièrement). Je remercie enfin Pauline, qui fut une danseuse admirable (sauf en Lindy) ainsi qu'une très chère amie.

Je voudrais remercier mes camarades Vivek, Julien, Ioannis, Matthieu et d'autres cités autre part, et avec qui j'ai survécu à l'ENS. Je remercie les gens de la danse, avec qui j'ai passé une bonne partie de mon temps libre, et en particulier Adrie qui m'a appris à faire quelque chose de mes deux pieds. Le séminaire de la détente a été un espace auquel je dois une bonne partie de ma culture mathématique. Nous avons réussi avec Valentin, Anna et Filipe (et un autre qui à la fin tenait tout) à le maintenir en vie pendant un temps, et à programmer des exposés de qualité (enfin, pas tous). Je voudrais remercier les AGPR de l'UMPA, Valentine, Paul, Simon et Arthur, qui m'ont aidé dans la préparation de mes premiers cours et TD. Je remercie les agrégatifs de 2021 qui ont du subir mon cours, ce qui fut une expérience fortement sympathique et intéressante (pour moi, pour eux, je ne peux l'affirmer). Merci à mes cobureaux Ronan et Charlie (et un autre qui est déjà apparu) avec qui j'ai passé une super année à essayer de dire des trucs intelligents. Je voudrais remercier les doctorants de la Sapienza qui m'ont accueilli pendant quelques mois cet hiver. Enfin je pense à mes autres camarades doctorants, post-doctorants et permanents (certains ayant changé de catégorie) : Raphaël, Hugues, Basile, Antoine, William, Élise, Vianney, Clément, Denis, Vanessa, Thomas, Lilia, Aymane, Qyung, Céline, Benoît, Raphaël, Thomas, Amine, *et cetera*..

Je voudrais remercier mes professeurs de lycée, Mme Taleb, Mme Weill et M. Cros qui m'ont dirigé vers les mathématiques. Je remercie mes professeurs de prépa, messieurs

George, Nicolai et Chateau. Je remercie mes professeurs de l'ENS, J.C. Sikorav, G. Miermont, S Rozensztajn, F. Bruneault, B. Sévenec, L. Dupaigne, F. Fanelli, D. Gaboriau, V. Calvez et L. Brandolese. Je voudrais en particulier remercier C. Danthony pour toute son action pour l'enseignement et la démocratie à l'ENS. Je voudrais enfin remercier Virginia, Magali, Jessica et Laure pour permettre au labos de tourner.

Je voudrais remercier le pangolin qui m'a permis d'avoir l'agreg. Je voudrais enfin remercier l'association de la Pauline de Dahouët, pour les nombreuses photos partagées. Grâce à eux, j'ai pu reproduire cette petite chaloupe assez fidèlement. Ce fut utile pour occuper deux confinements.

Table des matières

1	Introduction : théorie cinétique collisionnelle	1
1.1	Description mésoscopique d'un système de particule	2
1.1.1	Équation de Boltzmann, Équation de Landau	2
1.1.2	Propriétés usuelles des solutions	5
1.1.3	Conditions de bord	7
1.1.4	Théorie de Cauchy pour les équation de Boltzmann et Landau . . .	8
1.1.5	Limite des collisions rasantes	13
1.2	Système déterministe de particule microscopique	15
1.2.1	Système Hamiltoniens de particules en interaction	15
1.2.2	Mesure de Gibbs	17
1.2.3	Condition de Bord	18
1.3	Passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique	20
1.3.1	Scaling de Boltzmann-Grad et théorème de Lanford	20
1.3.2	Ordre de Grandeur	21
1.3.3	Autre scaling du gaz de particule en interaction	22
1.3.4	Hiérarchie BBGKY et formulation précise du théorème de Lanford .	24
1.3.5	Un modèle de gaz simplifié : le gaz de Lorentz	27
1.3.6	Résultat en temps long pour le gaz de particules en interactions : les cas linéaire et linéarisé	29
2	Résumé des apports de la thèse	35
2.1	Dérivation de l'équation de Boltzmann dans un domaine à bord avec ré- flexion isotrope	35
2.2	Limite de collisions rasantes : de l'équation de Boltzmann linéarisée à l'équa- tion de Landau	38
2.3	Validité en temps long de l'équation de Boltzmann linéarisée	41
2.A	Preuve de la proposition 2.3.2	47
3	Boltzmann-Grad limit of a hard sphere system in a box with isotropic boundary conditions	49
3.1	Introduction	49
3.2	The model	51
3.2.1	Construction of the stochastic process	51
3.2.2	Well-posedness of the process	53
3.3	The BBGKY hierarchy and its pseudo-trajectories	54
3.3.1	Stochastic semigroup and expression of the hierarchy	54
3.3.2	The pseudotrajectories development	55
3.3.3	Proof of Theorem 3.3.2	56
3.4	Boltzmann's hierarchy and <i>a priori</i> estimates	58
3.4.1	Definition of the Boltzmann hierarchy	58

3.4.2	Well-posedness of the operators $Q_{s,s+r}^0(t)$	59
3.4.3	Continuity estimates	62
3.5	Main theorem	63
3.6	Proof of the term by term convergence	65
3.6.1	Continuity estimates of the two pseudotrajectories	65
3.6.2	Estimation of \mathcal{P}_1	67
3.6.3	Estimation of $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}'_2 \cup \mathcal{P}_3$	69
3.A	Carleman's parametrization and scattering estimates	71
3.B	Hydrodynamic limit	73
4	The grazing collisions limit from the linearized Boltzmann equation to the Landau equation for short-range potentials	75
4.1	Introduction	75
4.2	Preliminaries and main results	78
4.3	Grazing collisions limit for short-range potentials with $s < 1$	80
4.3.1	Estimates for the two-particle scattering	80
4.3.2	Proof of Theorem 4.2.2	84
4.3.3	Proof of Corollary 4.2.3	86
4.4	Convergence to non-cutoff Boltzmann equation for short-range potentials with $s > 1$	87
5	Long time validity of the linearized Boltzmann equation for hard spheres: a proof without billiard theory	93
5.1	Introduction	93
5.1.1	Definition of the system	94
5.1.2	Convergence to the linearized Boltzmann equation	95
5.1.3	Strategy of the proof	96
5.2	Development along pseudotrajectories and time sampling	99
5.2.1	Definition of (forward) pseudotrajectories	99
5.2.2	Development along pseudotrajectories	100
5.2.3	Conditioning	103
5.2.4	Sampling	105
5.3	Quasi-orthogonality estimates	108
5.4	Clustering estimations	113
5.5	Estimation of non-pathological recollisions	116
5.6	Estimation of pathological recollisions	123
5.6.1	Finite-parameter expansion	123
5.6.2	Geometrical estimation of local recollisions	126
5.7	Treatment of the principal part	135
5.7.1	Duality formula	135
5.7.2	Linearized Boltzmann equation	140
	Bibliographie	142

Chapitre 1

Introduction : théorie cinétique collisionnelle

De tous temps l'Homme a voulu comprendre pourquoi l'eau coule. Une des premières descriptions dynamiques d'un fluide en mouvement fut donnée par Léonard Euler en 1756 par l'équation éponyme (voir [Eul57]). Au XIX^{ième} siècle Henri Navier (en 1823, voir [Nav23]) et Georges Stokes (1845, voir [Sto45]) l'améliorèrent en ajoutant un terme prenant en compte la viscosité du fluide. Dans le même temps la théorie de la thermodynamique était développée, notamment pour décrire les échanges thermiques dans les gaz. Ces équations étaient éprouvées par l'expérience, le XIX^{ième} ayant connu le développement de machines à vapeur particulièrement efficaces. Malgré tout, ces théories étaient des descriptions phénoménologiques de la matière et ne donnait en général une description des fluides comme un milieu continu (et non pas composé de particules).

La vision atomistique de la matière est assez ancienne, datant au moins du XVIII^{ième} siècle. Daniel Bernoulli interpréta en 1738 la pression d'un gaz sur les parois comme l'influence commune des chocs de particules sur les parois (voir [Ber38]). Elle fut plus largement développée à partir de la seconde moitié du XIX^{ième} siècle, notamment par August Krönig et Rudolf Clausius. James Maxwell (en 1859, [Max03]) et Ludwig Boltzmann (en 1871, [Bol96]) donnèrent une description statistique d'une particule dans un gaz en interaction, et ce même en dehors de l'équilibre. Il restait à établir un lien entre l'évolution microscopique des particules du système et les lois macroscopiques le décrivant. Ce programme fut abordé par David Hilbert au cours du Congrès International des Mathématiques de 1900 (le 6^{ième} problème de Hilbert).

Durant cette conférence Hilbert proposa l'utilisation d'une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique (de l'ordre de $10^{-10}m$) et l'échelle macroscopique ($10^{-3}m$) : l'échelle mésoscopique (ou cinétique, environ $10^{-7}m$). À cette échelle on peut avoir une description plus fine du gaz, dans laquelle on n'a pas accès uniquement à des quantités moyennées en vitesse (et localement en espace) comme la température, la densité, la vitesse moyenne, mais à la loi de probabilité en espace et vitesse d'une particule typique.

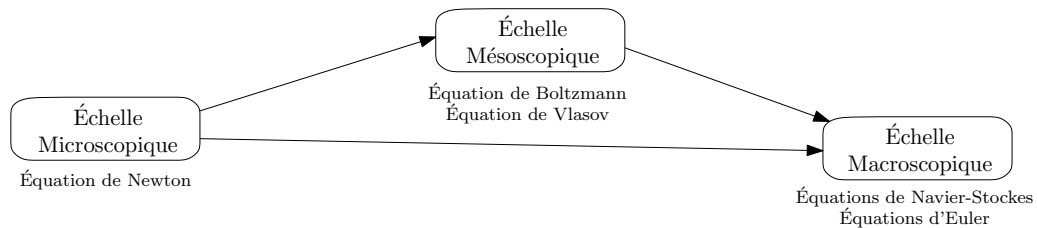


FIGURE 1.1 – Les différentes échelles d'un système physique avec les équations les décrivant.

Le passage direct de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique (qui permettrait de donner une description des liquides) est un problème très difficile dans lequel il n'y a eu que peu d'avancée pour des dynamiques déterministes. Si l'on choisit de passer par l'échelle mésoscopique, on ne peut décrire que des fluides beaucoup moins denses, comme des gaz.

Dans cette thèse nous nous sommes intéressé au passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique pour des gaz de densité faible. Dans ces modèles, les particules évoluent de manière indépendantes la plupart du temps. Les interactions ne se produisent que lorsque deux particules sont à très faible distance l'une de l'autre, et de manière très intense (donc presque instantanée). Un bon exemple de tels systèmes est le gaz des sphères dures. On regarde un très grand nombre de petites boules de billard évoluant dans un espace de dimension d , et qui communiquent uniquement quand deux d'entre elles se heurtent. Dans cette limite d'échelle, les collisions entraînent des trajectoires très instables : en perturbant un peu la donnée initiale (par exemple en position) les trajectoires peuvent être très différentes. Cela fait émerger un phénomène de *mélange* dans le système qui peut expliquer l'irréversibilité du système aux échelles mésoscopiques.

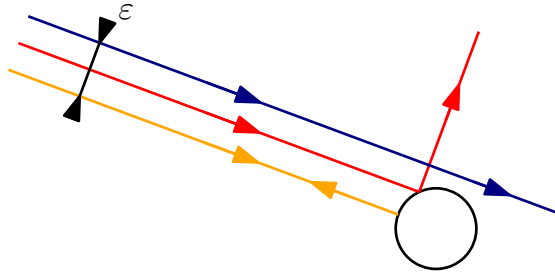


FIGURE 1.2 – Trois trajectoires possibles pour une collision avec une sphère dure avec une petite perturbation de la donnée initiale (ε le rayon d'une particule).

On peut différencier ces modèles des gaz en champ moyen, où chaque particule interagit avec toutes les autres particules, mais avec une très faible intensité. La dynamique n'est alors plus aussi mélangeante que dans le cas précédent, et est décrite par des équations mésoscopiques réversibles¹. Un des problèmes majeurs de la physique mathématique est de combiner les effets de champs moyens et les effets collisionnels. Cela permettrait de donner une description plus précise des plasmas.

Le sujet a connu des développements récents, notons en particulier les thèses de Nathalie Ayi [Ayi16] et de Théophile Dolmaire [Dol19] qui ont toutes deux des bibliographies très détaillées qui nous ont servi dans la partie historique de cette introduction.

1.1 Description mésoscopique d'un système de particule

Dans cette première partie, nous nous intéresserons à la description d'un gaz de faible densité à l'échelle mésoscopique.

Dans la suite, on notera Λ le domaine (de dimension d) dans lequel évolue le gaz. En général ce sera soit \mathbb{R}^d soit le tore plat $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$.

1. Pour l'instant je n'ai pas d'explication satisfaisante de pourquoi le champ moyen est réversible et pas la limite de densité faible, et si cette différence est liée au caractère mélangeant des systèmes.

1.1.1 Équation de Boltzmann, Équation de Landau

Équation de Boltzmann

Un premier modèle décrivant un gaz de faible densité à l'échelle mésoscopique fut donné par Maxwell (dans un système à l'équilibre) [Max03] et par Boltzmann (hors équilibre) dans [Bol96, Bol64] *via* l'équation éponyme. Une analyse rigoureuse du modèle fut entreprise par Hilbert (voir [Hil12]) dans la suite de sa conférence au Congrès International des Mathématiciens, et elle fut suivie de nombreux autres travaux que nous allons en partie aborder.

On note $f(t, x, v)dx dv$ la probabilité de trouver une particule du gaz au point $(x, v) \in \Lambda \times \mathbb{R}^d$. L'évolution de $f(t)$ est donnée par

$$(1.1.1) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f) \text{ pour } t > 0, (x, v) \in \Lambda \times \mathbb{R}^d.$$

Dans ce modèle, les particules évoluent librement en ligne droite tant qu'il n'y a pas d'interaction, ce qui est décrit par le membre de gauche. Lorsqu'une particule en rencontre une autre, il y a une collision instantanée qui est décrite par l'opérateur de collision Q .

Cette interaction entre les particules 1, 2 de vitesses (v', v'_*) se déroule *via* un processus $(v', v'_*) \rightarrow (v, v_*)$ ((v, v_*) les vitesses des particules après la collision) vérifiant les propriétés suivantes. Tout d'abord elle est supposée conserver l'impulsion et l'énergie des deux particules :

$$(1.1.2) \quad v + v_* = v' + v'_*$$

$$(1.1.3) \quad |v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2.$$

Notons que cela implique qu'il existe un vecteur unitaire $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que

$$(1.1.4) \quad v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \eta, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \eta.$$

On peut donc paramétrer les vitesses réfléchies par η , et on note $b(v - v_*, \eta)d\eta$ (b positif) le noyau de transition $(v', v'_*) \rightarrow (v, v_*)$ pour les vitesses post-collisionnelles². Le noyau b dépend de la nature microscopique des interactions. On suppose ensuite que les collisions sont micro-réversibles, *i.e.* que la transition $(v', v'_*, \frac{v-v_*}{|v-v_*|}) \rightarrow (v, v_*, \eta)$ a la même probabilité que $(v, v_*, \eta) \rightarrow (v', v'_*, \frac{v-v_*}{|v-v_*|})$, soit $b(v - v_*, \eta) = b(v' - v'_*, -\frac{v-v_*}{|v-v_*|})$.

On fait enfin une hypothèse de chaos sur le gaz, *i.e.* que la distribution de deux particules de coordonnées (x_1, v_1) et (x_2, v_2) est $f(t, x_1, v_1)f(t, x_2, v_2)$. Sous ces hypothèses, on retrouve l'opérateur de collision de Boltzmann :

$$(1.1.5) \quad Q(f, h)(x, v) := \int_{\mathbb{R}^r \times \mathbb{S}^{d-1}} (f(x, v')h(x, v'_*) - f(x, v)h(x, v_*))b(v - v_*, \eta)d\eta dv_*.$$

Généralement Q est défini de manière symétrique, mais pour décrire la statistique d'une particule étiquetée dans un gaz (et non pas une particule moyenne), il sera pratique d'utiliser la définition précédente (voir les paragraphes 1.3.5 et 1.3.6 sur les équations de Boltzmann linéaires et linéarisées).

2. Dans la littérature on prend plutôt la notation (v, v_*) pour les vitesses pré-collisionnelles Il me semble que ce n'est pas la bonne convention, car dans l'opérateur de Boltzmann, $f(t, x, v')f(t, x, v'_*)$ est la densité juste avant la collision des couples de particules permettant d'avoir une nouvelle particule à l'état (x, v) juste après t .

Noyau de collision avec et sans cut-off

On distingue deux types d'opérateurs de collision : lorsque le noyau $b(v - v_*, \eta)$ est intégrable par rapport à η , on parle de noyau *avec cut-off*, et lorsque qu'il n'est pas intégrable de noyau *sans cut-off*. Dans le premier cas $Q(\varphi, \varphi)$ peut être défini au sens classique pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d_v)$. Pour un noyau sans cut-off, on a besoin de plus de régularité (voir le paragraphe 1.1.5).

Dans le cas de noyau venant d'interactions *via* potentiel (décrit dans le paragraphe suivant), la singularité en η vient des interactions à longue portée.

Noyau de collision venant de la collision *via* un potentiel d'interaction

Au cours de cette thèse, nous nous sommes appliqués à dériver l'équation de Boltzmann et certaines de ses variantes à partir de systèmes physiques de particules en interaction *via* un potentiel \mathcal{V} . Nous allons donner une manière canonique de construire un noyau de Boltzmann associé à un certain potentiel d'interaction \mathcal{V} , qui est supposé à symétrie sphérique et avec une décroissance suffisamment rapide à l'infini. Pour simplifier la présentation, nous ne considérons que des potentiels à support compact (de rayon 1).

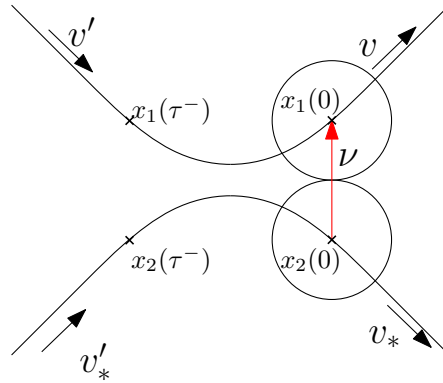


FIGURE 1.3 – Deux particules en interaction.

Considérons deux particules de coordonnées (x_1, v_1) et (x_2, v_2) qui commencent à interagir au temps 0. On fixe la donnée initiale $(x_1(0), v_1(0)) = (0, v)$ et $(x_2(0), v_2(0)) = (\nu, v_*)$ avec $\nu \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $(v - v_*) \cdot \nu > 0$. Les particules interagissant *via* le potentiel \mathcal{V} , elles vérifient les équations de mouvement

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = v_1, & \frac{d}{dt}v_1 = -\nabla\mathcal{V}(x_1 - x_2), \\ \frac{d}{dt}x_2 = v_2, & \frac{d}{dt}v_2 = \nabla\mathcal{V}(x_1 - x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = v_1 + v_2, & \frac{d}{dt}(v_1 + v_2) = 0, \\ \frac{d}{dt}(x_1 - x_2) = v_2 - v_1, \\ \frac{d}{dt}(v_1 - v_2) = 2\nabla\mathcal{V}(x_1 - x_2). \end{cases}$$

On fait évoluer pour t allant vers $-\infty$. Le potentiel ayant un support compact, les particules cessent d'interagir à partir d'un moment τ^- et

$$(v_1, v_2) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} (v', v'_*).$$

Cela permet de définir les vitesses pré-collisions.

On définit alors l'opérateur de Boltzmann au sens de Grad

$$(1.1.6) \quad Q_{\mathcal{V}}(f, f)(v) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} (f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)) ((v - v_*) \cdot \nu)_+ dv_* d\nu.$$

Dans le cas où le potentiel est décroissant et vérifie la condition de Sone (voir [Son07])

$$(1.1.7) \quad \forall r > 0, \quad r\mathcal{V}''(r) + 2\mathcal{V}'(r) \geq 0$$

on peut réécrire l'opérateur de Boltzmann sous la forme du paragraphe précédent en faisant le changement de variable $\nu \mapsto \eta$. La fonction η est défini comme dans (1.1.4). On note $b(v - v_*, \eta)$ le jacobien de cette application

$$((v - v_*) \cdot \nu)_+ d\nu \rightarrow b(v - v_*, \eta) d\eta.$$

Notons que cette procédure peut être généralisée au potentiel de portée infinie si on suppose une décroissance suffisamment rapide. Dans ce cas $b(v - v_*, \cdot)$ ne sera plus borné à $v - v_*$ fixé et l'opérateur de Boltzmann correspondant sera sans cut-off.

Un des seuls cas où l'on peut calculer explicitement le noyau de collision est celui des sphères dures, où l'interaction se fait *via* le potentiel d'exclusion (formelle)

$$(1.1.8) \quad \mathcal{V}(r) := \begin{cases} 0 & \text{si } |r| > 1 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il faut comprendre le potentiel précédent comme une condition d'exclusion : $e^{-\mathcal{V}(x)} = \mathbb{1}_{|x| > 1}$. Les vitesses pré-collisionnelles sont données par les lois de Descartes

$$(1.1.9) \quad \begin{cases} v' = v - \nu \cdot (v - v_*)\nu, \\ v'_* = v_* + \nu \cdot (v - v_*)\nu \end{cases}$$

et le noyau de collision prend la forme simple

$$(1.1.10) \quad b(v - v_*, \eta) := |v - v_*|.$$

Potentiel en loi de puissance

Un autre cas où l'on peut presque calculer le noyau de collision est celui des lois de puissance $\mathcal{V}(r) := 1/r^s$. En dimension d avec $s > 1$, le noyau de collision peut s'écrire sous une forme factorisée :

$$(1.1.11) \quad b(v - v_*, \nu) = |v - v_*|^\gamma q\left(\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \eta\right), \quad \gamma = \frac{s - (2d - 2)}{s}$$

et q une fonction dépendant de γ , avec $\eta \mapsto q(\eta \cdot \vec{e}_1)$ non intégrable au voisinage de $\eta \cdot \vec{e}_1 \rightarrow 1$ (\vec{e}_1 un vecteur unitaire), on est donc dans un cas de noyau sans cut-off.

Dans le cas où $s = 1$ et $d = 3$ (potentiel de Coulomb) la formule précédente s'applique mais la non-intégrabilité de q devient trop grande pour pouvoir définir l'opérateur de Boltzmann.

Cette famille de noyau est discutée au paragraphe 1.1.5.

Équation de Landau

Il existe différentes variantes de l'équation de Boltzmann (Fokker-Planck, BGK,...). Nous allons en particulier nous intéresser au cas de l'équation de Landau, introduite une première fois par Lev Landau dans [Lan36] (voir aussi [Bal75, LP81]) pour décrire les gaz de Coulomb en couplage faible (voir le paragraphe 1.1.5).

Elle s'écrit presque comme l'équation de Boltzmann :

$$(1.1.12) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \mathcal{A}_{\mathcal{V}} Q_L(f, f) \text{ pour } t > 0, (x, v) \in \Lambda \times \mathbb{R}^3.$$

avec \mathcal{A}_ν un coefficient de diffusion et comme opérateur de collision

$$(1.1.13) \quad Q_L(f, h)(v) := 2\pi \nabla_v \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{P_{v-v_*}^\perp}{|v-v_*|^\alpha} \left(\nabla f(v) h(v_*) - f(v) \nabla h(v_*) \right) dv_* \right), \quad \alpha = 1.$$

avec $P_{v-v_*}^\perp$ la projection sur le plan orthogonal à $(v - v_*)$.

À la suite de Landau, d'autres opérateurs de collision Q_L ont été définis. On remplace le noyau $1/|v - v_*|^\alpha$ ($\alpha = 1$) par d'autres fonctions positives, par exemple en prenant $\alpha \in (-3, 1)$. Ces opérateurs ont un sens moins physique que (1.1.13). Néanmoins, on peut les retrouver comme approximation de l'opérateur de Boltzmann lorsque l'on ne tient compte que des collisions rasante. Plus précisément, pour un noyau de collision $b(v - v_*, \eta)$ on considère Q_α la suite des opérateurs de collision associés aux noyaux

$$c_\alpha \mathbb{1}_{\frac{|v-v_*|}{v-v_*} \cdot \eta < \alpha} b(v - v_*, \eta)$$

(i.e. des $\eta \sim 0^+$). Par exemple pour l'opérateur de Boltzmann lié à la loi de puissance $\mathcal{V}(r) := 1/r^s$, $s > 1$, l'opérateur de Landau associé sera en choisissant

$$(1.1.14) \quad Q_L(f, h)(v) := 2\pi \nabla_v \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{P_{v-v_*}^\perp}{|v-v_*|^\alpha} \left(\nabla f(v) h(v_*) - f(v) \nabla h(v_*) \right) dv_* \right),$$

$$\alpha = -2 - \gamma_s = \frac{4 - 3s}{s}.$$

C'est le problème de la limite des collisions rasantes qui sera abordé dans le paragraphe 1.1.5.

1.1.2 Propriétés usuelles des solutions

Nous allons maintenant donner quelques propriétés formelles des équation de Boltzmann et de Landau.

Grandeurs conservées et lois de conservation locale

Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction test. En utilisant l'échangeabilité et la microréversibilité du noyau de l'opérateur de Boltzmann, on a formellement

$$(1.1.15) \quad \int \varphi(v) Q(f, f)(v) dv = -\frac{1}{4} \int (\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*) (f' f'_* - f f_*) b(v - v_*, \eta) dv dv_* d\eta$$

où on note $\varphi = \varphi(v)$, $\varphi_* = \varphi(v_*)$, $\varphi' = \varphi(v')$ et $\varphi'_* = \varphi(v'_*)$. De même, pour l'équation de Landau,

$$(1.1.16) \quad \int \varphi(v) Q_L(f, f)(v) dv = -\pi \int (\nabla \varphi - \nabla \varphi_*) \frac{P_{v-v_*}^\perp}{|v-v_*|^\alpha} (\nabla f f_* - f \nabla f_*) dv_* dv.$$

Ainsi en choisissant

$$\varphi(v) := \begin{cases} 1 \\ v_i, \quad i = 1, \dots, d, \\ |v|^2 \end{cases}$$

les intégrales (1.1.15), (1.1.16) s'annulent. Dans l'autre sens, il est possible de montrer que toute fonction suffisamment régulière annulant (1.1.15) ou (1.1.16) est une combinaison linéaire de ces précédentes fonctions (voir par exemple [Cer88] dans le cas de Boltzmann).

On obtient ainsi les lois de conservation locales suivantes pour f solution de l'équation de Boltzmann ou de Landau :

$$(1.1.17) \quad \begin{aligned} & \partial_t \int f(v) dv + \operatorname{div}_x \int f(v) v dv = 0 \text{ (conservation de la masse),} \\ & \partial_t \int f(v) v dv + \operatorname{div}_x \int f(v) v \otimes v dv = 0 \text{ (conservation de l'impulsion),} \\ & \partial_t \int f(v) |v|^2 dv + \operatorname{div}_x \int f(v) |v|^2 v dv = 0 \text{ (conservation de l'énergie).} \end{aligned}$$

Notons bien que ces lois de conservation sont formelles. Par exemple, pour les solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann (que l'on définira au paragraphe 1.1.4), seule la masse est conservée localement, l'impulsion étant conservée seulement globalement et l'énergie dissipée.

Théorème H de Boltzmann

Une des particularités des équations de Boltzmann et Landau est leur irréversibilité. Elle est décrite par le Théorème H de Boltzmann. Si on choisit $\varphi := \log f$ dans (1.1.15) et (1.1.16), on obtient respectivement

$$(1.1.18) \quad D(f) = - \int \log f Q(f, f)(v) dv = \frac{1}{4} \int \left(\frac{f' f'_*}{f f_*} - 1 \right) \log \left(\frac{f' f'_*}{f f_*} \right) f f_* b(v - v_*, \eta) dv dv_* d\eta \leq 0$$

$$(1.1.19) \quad D_L(f) = - \int \log f Q_L(f, f)(v) dv = \pi \int \left(\frac{\nabla f}{f} - \frac{\nabla f_*}{f_*} \right) \frac{P_{v-v_*}^\perp}{|v-v_*|^\alpha} \left(\frac{\nabla f}{f} - \frac{\nabla f_*}{f_*} \right) f f_* dv_* dv \leq 0.$$

Ainsi l'entropie de la distribution f

$$(1.1.20) \quad H(f) := \iint f(x, v) \log f(x, v) dx dv$$

est une fonction de Lyapunov du système : dans le cas de l'équation de Boltzmann,

$$(1.1.21) \quad H(f(t)) - H(f(0)) = - \int_0^t \int D(f(s))(x) dx ds \leq 0,$$

avec une égalité formelle.

État stationnaire des équations de Boltzmann et Landau

Les solutions stationnaires de l'équation de Boltzmann (ou de Landau) doivent annuler la création d'entropie (pour les deux équations). Soit M un état stationnaire,

$$0 = D(M) = \frac{1}{4} \int \left(\frac{M' M'_*}{M M_*} - 1 \right) \log \left(\frac{M' M'_*}{M M_*} \right) M M_* b(v - v_*, \eta) dv dv_* d\eta \leq 0$$

et donc $M' M'_* = M M_*$. On en déduit qu'il existe trois constantes $(\rho, u, T) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ telles que

$$M(v) = \frac{\rho}{(2\pi/T)^{d/2}} e^{-|v-u|^2/2T}.$$

Il est aussi possible de retrouver ces fonctions comme minimiseurs de l'entropie à masse, vitesse moyenne et température fixées. On appelle cette classe de fonction les maxwelliennes. Notons que l'on peut appliquer le même raisonnement dans le cas de l'équation de Landau.

Cela donne une formulation alternative du théorème H. Pour M une gaussienne à température fixée, on définit l'entropie relative comme

$$(1.1.22) \quad H(f|M) := \iint \left(f \log \frac{f}{M} - f + M \right) dx dv.$$

qui est contrôlé par

$$(1.1.23) \quad H(f(t)|M) + \int_0^t \int D(f(s))(x) dx ds \leq H(f(0)|M).$$

Notons que dans cette formulation, on a une borne *a priori* sur

$$\int f(t) (1 + |v|^2 + \log f(t)) dx dv.$$

1.1.3 Conditions de bord

Il reste maintenant à comprendre comment le bord d'un domaine peut influencer le gaz à l'intérieur. On regardera ici les conditions de bord du point de vue de l'équation cinétique, les aspects microscopiques de définition de la dynamique seront abordés dans la section 1.2.3.

Dans un premier temps décrivons le lien entre la dynamique microscopique et la condition de bord pour la densité qui lui est associée. Dans les modèles particuliers que nous avons regardé (voir le paragraphe 1.2.3), les réflexion au bord sont stochastiques. Si une particule arrive au bord au point x avec une vitesse v_{in} , elle est réémise au même point à la vitesse v_{out} avec probabilité

$$(1.1.24) \quad d\mathbb{P}_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}}) := K_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}})(v_{\text{out}} \cdot n(x))_- dv_{\text{out}}$$

où $n(x)$ est le vecteur normal au bord du domaine, orienté vers l'extérieur, et $K_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}})$ est un noyau caractérisant la réflexion.

Dans ce cas, la densité de particule vérifie la condition de bord suivante :

$$(1.1.25) \quad f(t, x, v_{\text{out}}) = \int f(t, x, v_{\text{in}}) K_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}})(v_{\text{in}} \cdot n(x))_+ dv_{\text{in}}.$$

Cette formule vient de la conservation des flux de particules entrants et sortants définis pour $x \in \partial\Lambda$

$$(1.1.26) \quad \Phi_{\text{entrant}}(x) := \int f(t, x, v_{\text{in}})(v_{\text{in}} \cdot n(x))_+ dv_{\text{in}}$$

$$(1.1.27) \quad \Phi_{\text{sortant}}(x) := \int f(t, x, v_{\text{out}})(v_{\text{out}} \cdot n(x))_- dv_{\text{out}}.$$

Cela nous permet en particulier de montrer la conservation globale de la masse pour f solution formelle de l'équation de Boltzmann avec la condition de bord (1.1.25)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) dx dv &= \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^d} -v \cdot \nabla_x f(t, x, v) dx dv \\ &= \int_{\partial\Lambda \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) (v \cdot n(x)) d\sigma(x) dv \\ &= \int_{\partial\Lambda} (\Phi_{\text{entrant}}(t, x) - \Phi_{\text{sortant}}(t, x)) d\sigma(x) = 0 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini et le faite que (1.1.24) soit une mesure de probabilité.

Notons que si $K_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}})(v_{\text{out}} \cdot n(x))_- dv_{\text{out}}$ est une mesure de probabilité, $K_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}})(v_{\text{in}} \cdot n(x))_+ dv_{\text{in}}$ ne l'est pas toujours, notamment dans le cas de la réflexion maxwellienne.

On peut tout d'abord modéliser par la *réflexion spéculaire* où la vitesse de la particule réémise suit les lois de Descartes. La loi de réflexion est déterministe et donnée par

$$(1.1.28) \quad v_{\text{out}} := v_{\text{in}} - 2n(x) \cdot v_{\text{in}} n(x).$$

et dans ce cas la condition de bord s'apparente à une simple condition de continuité :

$$(1.1.29) \quad f(t, x, v_{\text{out}}) = f(t, x, v_{\text{out}} - 2n(x) \cdot v_{\text{out}} n(x)) \text{ pour } t > 0, x \in \partial\Lambda \text{ et } v_{\text{out}} \cdot n(x) < 0.$$

Une deuxième possibilité est la condition de bord *Maxwellienne*³ : on modélise le bord comme un réservoir de température, où les particules touchant le bord sont réémises thermalisées :

$$(1.1.30) \quad d\mathbb{P}_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}}) = (v_{\text{out}} \cdot n(x))_- M_w(x, v_{\text{out}}) dv_{\text{out}}, \quad M_w(x, v) := \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2T(x)}}}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}} T(x)^{\frac{d+1}{2}}}$$

avec $T(x)$ la température au point x , avec la condition de bord correspondante :

$$(1.1.31) \quad f(t, x, v_{\text{out}}) = M_w(x, v) \int f(t, x, v_{\text{in}})(v_{\text{in}} \cdot n(x))_+ dv_{\text{in}} \text{ pour } t > 0, x \in \partial\Lambda \text{ et } v_{\text{out}} \cdot n(x) < 0.$$

Une troisième possibilité (sur laquelle nous avons travaillé durant la thèse) est la *réflexion isotrope* :

$$(1.1.32) \quad d\mathbb{P}_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}}) = c \frac{(v_{\text{out}} \cdot n(x))_-}{|v_{\text{out}}|^d} \delta_{|v_{\text{out}}| - |v_{\text{in}}|} dv_{\text{out}},$$

avec c une constante de normalisation. La direction de la vitesse réfléchie est aléatoire, mais sa norme est conservée. La condition de bord associée est

$$(1.1.33) \quad f(t, x, v_{\text{out}}) = c \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(t, x, |v_{\text{out}}|\omega)(\omega \cdot n(x))_+ d\omega \text{ pour } t > 0, x \in \partial\Lambda \text{ et } v_{\text{out}} \cdot n(x) < 0.$$

Regardons maintenant l'équation de Boltzmann dans un domaine borné avec pour condition de bord, soit la réflexion spéculaire, soit la réflexion isotrope, soit la réflexion maxwellienne avec une température uniforme ($T \equiv 1$ au bord du domaine). Le théorème H (1.1.23) est alors toujours valable. De plus, dans le cas de la réflexion Maxwellienne, on a un contrôle supplémentaire sur la valeur de la densité au bord du domaine :

$$(1.1.34) \quad H(f(t)|M) + \int_0^t \int_{\Lambda} D(f(s))(x) dx ds + \int_0^t \int_{\partial\Lambda} E(f(s)|M)(x) dx ds \leq H(f(0)|M)$$

où l'information de Darrozès-Guiraud

$$(1.1.35) \quad E(f|M)(x) := \int h\left(\frac{f}{M}\right) (2\pi)^{1/2} M(v)(v \cdot n(x))_+ dv - h\left(\int \frac{f}{M} (2\pi)^{1/2} M(v)(v \cdot n(x))_+ dv\right)$$

avec $h(z) = z \log z$. Comme h est convexe, $E(\frac{f}{M})$ est positive. On peut écrire une formule similaire dans le cas de la réflexion isotrope.

3. Dans la littérature, cette condition de bord est aussi nommée condition de réflexion diffuse. De plus la condition de bord Maxwellienne peut aussi désignée une combinaison convexe entre la réflexion spéculaire (1.1.28) et la loi (1.1.30).

1.1.4 Théorie de Cauchy pour les équation de Boltzmann et Landau

À ce jour, il n'existe pas de théorie complète de l'existence et de l'unicité pour les solutions de l'équation de Boltzmann. L'une des difficultés de l'équation de Boltzmann viens du fait que les seules estimations *a priori* sur les solutions de l'équation viennent des lois de conservations (masse, vitesse, énergie et entropie). De l'autre côté, l'opérateur de collision est quadratique, non-local en v mais ponctuel en t et x . Les estimations *a priori* ne sont donc pas suffisantes pour définir $Q(f, f)$ au sens des distributions.

On peut comparer les résultats actuels pour Boltzmann avec ceux de l'équation de Navier-Stokes. On distingue deux types de solutions : les solutions loin de l'équilibre (analogues aux solutions de Leray) où l'on a toujours existence mais pas unicité, et les solutions proches de l'équilibre (analogues aux solutions de Kato), régulières mais n'existant que pour une perturbation petite dans un espace adapté.

Il existe des spécificités dans le cas où l'on regarde un noyau de collision avec ou sans cut-off. Pour simplifier la discussion nous ne regarderons que le cas avec cut-off dans la suite. On imposera la condition suivante qui est encore plus restrictive

$$(1.1.36) \quad \begin{aligned} 0 < b(v - v_*, \eta) < C(1 + |v - v_*|) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}, \\ \int_{\mathbb{D}^{d-1}} b(v - v_*, \eta) d\eta \geq C \frac{|v - v_*|}{1 + |v - v_*|}. \end{aligned}$$

En pratique, on pourra penser au noyau des sphères dures $b(v - v_*, \eta) = |v - v_*|$. Les théorèmes ont été généralisés en partie à des classes plus larges de noyaux de collision, mais nous ne maîtrisons pas suffisamment la théorie pour donner davantage de détails.

Cas des solutions homogènes en espace

Il existe un cas où la théorie de Cauchy est complète (existence et unicité des solutions même loin de l'équilibre) : le cas homogène en espace. La distribution de particules ne dépend plus de la position x et l'équation de Boltzmann devient une équation purement non-locale sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_v^d$

$$(1.1.37) \quad \begin{aligned} \partial_t f &= Q(f, f), \\ f(t = 0) &:= f_0. \end{aligned}$$

Il est alors possible de tirer partie des annulations entre la partie positive de Q

$$Q_+(f, f) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} f(x, v') f(x, v'_*) b(v - v_*, \eta) d\eta dv_*$$

et de sa partie négative $Q_- := Q_+ - Q$. Dans le cas des sphères dures ($b(v - v_*, \eta) := |v - v_*|$), on a le théorème d'existence suivant. Considérons pour $\kappa > 0$ et $p \in [1, \infty]$ la norme

$$(1.1.38) \quad \|f\|_{L_\kappa^p(\mathbb{R}^3)} := \|(1 + |v|^\kappa) f(v)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)},$$

et $L_\kappa^p(\mathbb{R}^3)$ l'espace de Banach associé.

Théorème 1.1.1

Considérons $f_0 \geq 0$ tel que $H(f_0)$ et $\|f_0\|_{L_4^1(\mathbb{R}^3)}$ soient finis. Il existe alors une unique solution $f(t)$ de l'équation de Boltzmann dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{R}^3))$. De plus $f(t)$ est borné dans $L_4^1(\mathbb{R}^3)$ et vérifie le théorème H

$$H(f(t)) \leq H(f_0).$$

On peut trouver la preuve de ce théorème dans le chapitre 6 de [CIP94]. Ce type de résultat a été montré dans un premier temps par Torsten Carleman dans [Car33] dans le cas de $L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Par la suite il y eu un développement assez important de ce type de résultat, notamment pour des noyaux de collision différents.

Notons aussi pour l'équation homogène, il est possible de montrer que les solutions convergent vers la solution stationnaire. Il reste alors à quantifier cette convergence (voir [BC99, Mou06b, Mou10]).

Solution loin de l'équilibre

Commençons par citer un résultat d'existence et d'unicité en temps courts : on se place dans un domaine sans bord (Λ est \mathbb{R}^d ou \mathbb{T}^d).

Théorème 1.1.2

Soit $f_0 \in C^0(\Lambda \times \mathbb{R}^d)$ tel qu'il existe deux constantes $\beta, \gamma > 0$ telles que

$$(1.1.39) \quad \sup_{(x,v) \in \Lambda \times \mathbb{R}^d} \left| f_0(x,v) e^{\frac{\beta}{2}|v|^2} \right| \leq \gamma.$$

Alors il existe une constante C indépendante de β, μ et f_0 tel que l'équation de Boltzmann admette une unique solution continue sur $[0, T]$, avec $T = C\gamma\beta^2$, C ne dépendant que de la dimension. De plus on obtient la borne suivante sur la solution :

$$(1.1.40) \quad \sup_{(x,v) \in \Lambda \times \mathbb{R}^d} \left| f(t,x,v) e^{\frac{\beta}{4}|v|^2} \right| \leq 2\gamma.$$

Ce sont les solutions au sens classique de l'équation de Boltzmann. Ce sont celles qui sont dérivées à partir d'un système de particules (voir le paragraphe 1.3.4).

Ce type de résultat peut s'étendre dans le cas d'un domaine à bord pour les réflexions spéculaires, isotropes ou Maxwelliennes (avec température uniforme). De plus Yan Guo, Chanwoo Kim, Daniela Tonon et Ariane Trescases ont montré la propagation de la régularité pour la solution de Boltzmann dans le cas d'un domaine à bord (voir [GKTT17]).

Le résultat d'existence en tout temps le plus complet est la construction de *solutions renormalisées*, et de Ronald DiPerna et Pierre-Louis Lions (voir [DL89], amélioré plus tard : [Lio94b, Lio94a] entre autres).

On reprend la présentation du Théorème 2.3.4 de [SR09] dans le cas sans bord.

Définition 1.1.1

Une solution renormalisée de l'équation de Boltzmann est une fonction

$$f \in C(\mathbb{R}^+, L^1_{\text{loc}}(\Lambda \times \mathbb{R}^d))$$

qui vérifie au sens des distributions

$$(1.1.41) \quad M(\partial_t + v \cdot \nabla_x) \Gamma \left(\frac{f}{M} \right) = \Gamma' \left(\frac{f}{M} \right) Q(f, f)$$

pour toute fonction test $\Gamma \in C^1(\mathbb{R}_+)$ tel que $|\Gamma'(s)| \leq C/\sqrt{1+s}$.

De plus on demande que $f(t)$ vérifie

— la conservation locale de la masse

$$\partial_t \int f(v) dv + \operatorname{div}_x \int f(v) v dv = 0,$$

— la conservation de l'impulsion avec une mesure de défaut

$$\partial_t \int f(v)v dv + \operatorname{div}_x \int f(v)v \otimes v dv + \nabla_x \mu = 0,$$

où μ est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}_+ \times \Lambda$ à valeurs dans les matrices $d \times d$ symétrique positive

— et l'inégalité d'entropie

$$H(f(t)|M) + \int_{\Lambda} \operatorname{tr}(\mu)(dx) + \int_0^t \int_{\Lambda} D(f(s))(x) dx ds \leq H(f_0|M)$$

avec tr la trace des matrices carrées.

Il est en fait possible d'imposer que (1.1.41) soit vérifiée dans un sens plus fort.

Théorème 1.1.3

Soit $f_0 \geq 0$ une fonction $L^1_{\text{loc}}(\Lambda \times \mathbb{R}^d)$ telle que $H(f_0|M)$ soit finie. Alors il existe une solution renormalisée $f(t)$ de l'équation de Boltzmann avec $f(t=0) = f_0$.

Le résultat a été généralisé par Stéphane Mischler au cas d'un domaine à bord avec une condition de bord Maxwellienne (voir [Mis00, Mis10]). Pour ce faire il utilise l'information de Darrozès-Guiraud (1.1.35) pour avoir une estimation *a priori* de $f(t)$ au bord, ainsi que des méthodes d'analyse avancées.

Solution proche de l'équilibre

L'idée est de regarder les solutions de l'équation de Boltzmann de la forme

$$f(t) := M(1 + g(t)).$$

où $g(t)$ est bornée dans un bon espace. On définit l'opérateur de Boltzmann linéarisé comme

$$(1.1.42) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_B g &:= \frac{1}{M} (Q(M, Mg) + Q(Mg, M)) \\ &= \int (g'_* + g' - g_* - g) M(v_*) b(v - v_*, \eta) db_* d\eta. \end{aligned}$$

Celui-ci vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

Théorème 1.1.4

Considérons un noyau de collision vérifiant la condition (1.1.36). Alors l'opérateur $-\mathcal{L}_B$ est autoadjoint et positif sur $L^2(M(v)dv)$ et son noyau est égal à

$$(1.1.43) \quad \ker(-\mathcal{L}_B) = \operatorname{Span}\{1, v_1, \dots, v_d, |v|^2\},$$

De plus pour tout g dans le domaine de $-\mathcal{L}_B$, on peut décomposer

$$(1.1.44) \quad -\mathcal{L}_B g = \nu(|v|)g + \mathcal{K}g$$

avec \mathcal{K} un opérateur compact et

$$(1.1.45) \quad \nu(|v|) = \int M(v_*) b(v - v_*, \eta) db_* d\eta.$$

Enfin \mathcal{L}_B a un saut spectral : il existe $\nu_0 > 0$ telle que

$$(1.1.46) \quad \inf_{g \in \ker(-\mathcal{L}_B)^\perp} \langle g, -\mathcal{L}_B g \rangle = \nu_0 \|g\|_{L^2(M(v)dv)}^2.$$

Le théorème précédent est une contre-partie linéaire du théorème H et du faite que les seules quantités conservées par l'équation de Boltzmann soient la masse, l'énergie et l'impulsion (on en trouve une preuve dans le paragraphe 3.2.1 de [SR09]).

Les premiers résultats d'existence et d'unicité en temps long pour des domaines sans bord (\mathbb{R}^3 ou \mathbb{T}^3) ont été prouvés par Seji Ukaï dans [Uka74, Uka76]. Il considère l'espace de Banach

$$(1.1.47) \quad H_{l,k} := \{g, \|g\|_{H_{l,k}} = \sup_v (1 + |v|^2)^{l/2} \|M^{1/2}g\|_{H_x^k(\Lambda)} < \infty\}$$

avec $H_x^k(\Lambda)$ l'espace de Sobolev de régularité s .

Théorème 1.1.5

Il existe $l_0 > 0$, $s_0 > 0$ tel que pour $l > l_0$, $s > s_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour

$$\|g_0\|_{H_{l,k}} \leq \varepsilon,$$

l'équation de Boltzmann admet une unique solution de la forme $f(t) = M(1 + g(t))$, avec $g(t=0) = g_0$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H_{l,k}) \cup \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H_{l,k})$.

La preuve du théorème se fait par analyse spectrale de $v \cdot \nabla_x - \mathcal{L}_B$.

Dans le cas d'un domaine à bord, la méthode spectrale n'est pas forcément la plus adaptée. Yan Guo a développé une autre théorie de Cauchy pour l'équation de Boltzmann pour des solutions moins régulières (voir [Guo10]). Fixons $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ un domaine strictement convexe suffisamment régulier avec la loi de réflexion spéculaire au bord de Λ (le même théorème est énoncé pour la réflexion Maxwellienne avec température uniforme, mais avec des conditions légèrement différentes) Introduisons pour $\rho > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ le poids

$$w(v) := (1 + \rho^2|v|^2)^\beta, \quad \beta > 3.$$

Théorème 1.1.6

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction g_0 vérifiant $\|wg_0\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$, $f_0 := M + M^{1/2}g_0$ positive et

$$\int g_0 M^{1/2} dv dx = \int g_0 M^{1/2} |v|^2 dv dv = 0.$$

Alors l'équation de Boltzmann avec réflexion spéculaire au bord admet une unique solution pour la donnée initiale f_0 . De plus cette solution est de la forme $(M + M^{1/2}g(t))$ avec pour un $\lambda > 0$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} e^{\lambda t} \|wg(t)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon.$$

La preuve s'appuie sur une analyse de \tilde{g} , solution de l'équation linéarisé

$$(1.1.48) \quad \partial_t \tilde{g} + v \cdot \nabla_x \tilde{g} = \mathcal{L}_B \tilde{g}.$$

L'auteur commence par découper \tilde{g} en deux morceaux. Une partie « hydrodynamique » qui est la projection de \tilde{g} sur le noyau de \mathcal{L}_B et une partie « purement cinétique ». La norme L^2 de la partie purement cinétique peut être directement contrôlée par la dissipation due à \mathcal{L}_B (et à son saut spectral). Par un argument de compacité, l'auteur montre qu'il est possible contrôler la norme L^2 de la partie hydrodynamique par la norme L^2 de la partie cinétique.

Dans un second temps l'auteur cherche un contrôle dans un espace L^∞ à poids de \tilde{g} . En itérant deux fois la formulation de Duhamel, il obtient

$$\tilde{g}(t) = S(t)g_0 + \int_0^t S(t-\tau) \mathcal{L}_B S(\tau) g_0 + \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' S(t-\tau) \mathcal{L}_B S(\tau-\tau') \mathcal{L}_B \tilde{g}(\tau'),$$

avec $S(t)$ le semi-groupe associé au transport libre avec réflexion. Les deux premiers termes de la somme sont quasiment explicite et seul le troisième peut poser problème. On remarque que l'on intègre deux fois en vitesse (on voit l'opérateur \mathcal{L}_B comme une intégration en vitesse) et deux fois en temps. Une intégration en vitesse et en temps se combinent pour faire une intégration en espace. On a transformé une intégrale singulière \mathcal{L}_B (uniquement en v) en une intégrale en (x, v) . En utilisant la borne L^2 sur $\tilde{g}(t)$, on contrôle le dernier terme dans L^∞ .

La partie non-linéaire de l'opérateur de Boltzmann étant contrôlable de manière quadratique dans notre L^∞ à poids, on peut conclure.

Notons que le résultat a été généralisé au cas d'une réflexion maxwellienne avec une température non homogène (voir [EGKM13] et le paragraphe suivant).

Problème stationnaire

On peut enfin regarder le cas de l'équation stationnaire, en particulier dans le cas d'un domaine borné avec une condition de réflexion maxwellienne au bord.

Ce problème est notamment lié à la modélisation d'un gaz entre deux plaques à différentes températures. Le système est alors hors équilibre mais on peut espérer que dans certaines conditions, il existe une solution stationnaire, qui dans la limite macroscopique permet de retrouver la loi de Fourier (la température croît de manière affine entre les deux plaques).

Un résultat d'existence et de stabilité des solutions stationnaires de Boltzmann a été montré dans le cas où la température au bord du domaine ne variait pas trop ($\sup_{x,y} |T(x) - T(y)|$ est suffisamment faible par rapport à $\inf_x T(x)$, voir [EGKM13]). La preuve utilise le même type d'estimation $L^2 - L^\infty$ que celles décrites dans le paragraphe précédent.

Notons que Raffaele Esposito et Rossana Marra ont écrit une review sur le sujet [EM20].

De plus amples détails sur la théorie de Cauchy de l'équation de Boltzmann sont données par Cédric Villani dans [Vil08]. Pour l'équation de Landau, une courte liste de résultats d'existence est donnée dans l'introduction de [GHJO20] (nous donnerons quelques résultats dans le paragraphe suivant).

1.1.5 Limite des collisions rasantes

Comme expliqué dans le paragraphe 1.1.1, l'équation de Landau peut-être vu comme une asymptotique de l'équation de Boltzmann. Nous détaillerons ces notions dans ce paragraphe. On ne regardera que le cas de la dimension 3.

Définition de l'opérateur de Boltzmann pour des noyaux de collisions sans cut-off

Revenons au cas des noyaux de collision de la forme

$$(1.1.49) \quad b(v - v_*, \eta) = |v - v_*|^\gamma q(\theta)$$

avec θ l'angle entre η et $v - v_*$, $\gamma \in [-3, 1]$ et $q :]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue. On peut se demander dans quels cas on peut définir pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ l'opérateur de Boltzmann $Q(\varphi, \varphi)$ associé au noyau b . On commence par faire le changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \in \mathbb{S}^2 \mapsto (\theta, \eta^\perp) \in [0, \pi] \times (\mathbb{S}^2 \cap \text{Vect}(v - v_*)^\perp), \\ \eta = \cos \theta \frac{v - v_*}{|v - v_*|} + \sin \theta \eta^\perp, \\ d\eta = \sin \theta d\theta d\eta^\perp. \end{array} \right.$$

On a alors

$$v' - v = -(v'_* - v_*) = \frac{(1 - \cos \theta)}{2}(v - v_*) + \frac{\sin \theta |v - v_*|}{2} \eta^\perp,$$

ce qui donne les estimations suivantes

$$(v' - v) = O(|v - v_*| \theta) \text{ et } \int (v' - v) d\eta^\perp = \pi(1 - \cos \theta)(v - v_*) = O(|v - v_*|^2 \theta^2).$$

En appliquant un développement de Taylor, pour une certaine constante

$$C_f \simeq \sup_v (|f(v)| + |\nabla f(v)| + |\nabla^2 f(v)|) e^{\frac{1}{2}|v|^2},$$

$$\begin{aligned} & f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*) \\ &= \left[\left(\frac{f}{M}(v'_*) - \frac{f}{M}(v_*) \right) \frac{f}{M}(v) + \frac{f}{M}(v_*) \left(\frac{f}{M}(v') - \frac{f}{M}(v) \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{f}{M}(v'_*) - \frac{f}{M}(v_*) \right) \left(\frac{f}{M}(v') - \frac{f}{M}(v) \right) \right] M(v)M(v_*) \\ &= \left[\left(\frac{f}{M}(v_*) \nabla \frac{f}{M}(v) - \frac{f}{M}(v) \nabla \frac{f}{M}(v_*) \right) \cdot (v' - v) + O(C_f^2 |v - v_*|^2 (1 - \cos \theta)) \right] M(v)M(v_*). \end{aligned}$$

On peut alors intégrer par rapport à η^\perp

$$\left| \int (f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)) d\eta^\perp \right| \leq C_f^2 (1 - \cos \theta) |v - v_*| M(v)M(v_*)$$

puis par rapport à θ

$$\begin{aligned} & \int \left| \int (f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)) d\eta^\perp \right| |v - v_*|^\gamma q(\theta) \sin \theta d\theta \\ & \leq \mathcal{A} C_f^2 |v - v_*|^{\gamma+1} M(v)M(v_*) \end{aligned}$$

qui est intégrable par rapport à v_* avec

$$(1.1.50) \quad \mathcal{A} := \int_0^\pi q(\theta) \sin \theta (1 - \cos \theta) d\theta.$$

On peut donc définir l'opérateur de Boltzmann $Q(f, f)$ si l'intégrale (1.1.50) est finie. En particulier, $Q(f, f)$ est défini pour $q(\theta) \sim \theta^\nu$ avec ν strictement plus grand que -4 .

Le noyau de collision associé au potentiel de Coulomb $\mathcal{V}(r) = 1/r$ est donné par la formule de Rutherford (à une constante multiplicative près)

$$(1.1.51) \quad b(v - v_*, \eta) = \frac{1}{|v - v_*|^3 \sin^4(\theta/2)}$$

Il se trouve donc à la limite des potentiels admissible : en reprenant les notations du paragraphe précédent, $q(\theta) \sin \theta (1 - \cos \theta) \sim 8\theta^{-1}$ qui n'est pas intégrable. L'intégral (1.1.50) a donc une divergence logarithmique en 0.

Régularisation du noyau de collision par coupure des collisions rasantes

Pour décrire un gaz de Coulomb en densité faible, Landau introduit le noyau de collision tronqué

$$(1.1.52) \quad b_\alpha(v - v_*, \eta) = \frac{\mathbb{1}_{\theta \geq \alpha}}{|\log \alpha| \sin^4(\theta/2)} |v - v_*|^{-3}.$$

Ainsi les constantes \mathcal{A}_α associées vérifient

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{1}{|\log \alpha|} \int_\alpha^\pi \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\sin^4 \theta / 2} d\theta \underset{0}{\sim} \frac{8}{|\log \alpha|} \int_\alpha^\pi \frac{d\theta}{\theta} \underset{0}{\sim} 8$$

On peut alors montrer que l'opérateur de Boltzmann $Q_\alpha(\cdot, \cdot)$ associé au noyau b_α converge vers l'opérateur de Landau Q_L défini (1.1.13) pour $\mathfrak{a} = 1$ au sens où ,

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3), \quad Q_\alpha(\varphi, \varphi) \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} 8 Q_L(\varphi, \varphi).$$

On peut généraliser en regardant des noyaux de la forme

$$(1.1.53) \quad b_\alpha(v - v_*, \eta) = |v - v_*|^{-\gamma} q_\alpha(\theta)$$

avec $q_\alpha(\theta)$ qui se « concentre » sur les collisions rasantes ($\theta \sim 0^+$). Plus précisément on suppose

$$(1.1.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\pi q_\alpha(\theta) (1 - \cos \theta) \sin(\theta) d\theta \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} \mathcal{A}_\infty \in (0, \infty) \\ \forall \theta_0 > 0, \sup_{\theta \geq \theta_0} q_\alpha(\theta) \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{} 0. \end{array} \right.$$

Dans ce cadre on veut montrer formellement que la suite d'opérateurs de Boltzmann Q_α associés aux $(b_\alpha)_\alpha$ converge vers $\mathcal{A}_\infty Q_L$, Q_L l'opérateur de Landau pour $\mathfrak{a} = \gamma + 2$ (au même sens que précédemment). Une preuve de la convergence a été donnée par Laurent Desvillettes dans [Des92] pour un scaling particulier ($q_\alpha(\theta) \sin \theta = \alpha^{-3} q(\theta/\alpha) \sin(\theta/\alpha)$ avec l'intégrale (1.1.50) finie).

Régularisation par coupure des interactions à longue portée

Une autre stratégie pour décrire le comportement du potentiel de Coulomb (peut être plus physique) est de tronquer le potentiel : pour une certaine fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissant suffisamment vite à l'infini, on définit

$$(1.1.55) \quad \mathcal{V}_\alpha(r) = \frac{f(\alpha r)}{r}$$

avec α^{-1} la longueur d'écrantage Debye. Dans le cas où $f(r) = e^{-r}$ on retrouve le potentiel de Yukawa. On peut montrer que pour Q_α la suite des opérateurs de Boltzmann associés aux \mathcal{V}_α , $|\log \alpha|^{-1} Q_\alpha$ convergent vers l'opérateur de Landau $\mathcal{A}_\infty Q_L$ pour $\mathfrak{a} = 1$.

Résultats sur la limite de collisions rasantes

La question suivante est de montrer que la suite des solutions $(f_\alpha)_{\alpha > 0}$ des équations de Boltzmann associées aux opérateurs Q_α converge vers la solution f_∞ de l'équation de Landau associée à $\mathcal{A}_\infty Q_L$. Il existe différents résultats correspondant aux différents types de solutions des équations de Boltzmann et Landau.

Une analyse rigoureuse de cette limite a été donnée dans un premier temps par Arsenev et Buryak dans [AB91]. La preuve dans le cas linéarisé est donnée dans [Des92]. Alexandre et Villani ont montré dans [AV04] la convergence à extraction près des $(f_\alpha)_\alpha$ solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann vers une solution renormalisée de l'équation de Landau (définie dans le même esprit que pour Boltzmann). Leur résultat s'applique à une famille très générale de noyaux de collision vérifiant des conditions minimales : on a convergence dès que les objets manipulés sont définis dans un sens très faible. Il est alors possible d'appliquer ce résultat au noyau de Yukawa⁴.

Nous renvoyons à l'introduction du chapitre 4 pour plus de détails sur le problème.

1.2 Système déterministe de particule microscopique

Nous allons maintenant définir le système qui nous a principalement intéressé pendant la thèse. C'est un déterministe, avec éventuellement des réflexions au bord décrites de manière probabiliste.

1.2.1 Système Hamiltoniens de particules en interaction

Considérons Λ un domaine que nous supposons dans un premier temps non borné (le tore plat \mathbb{T}^d ou l'espace entier \mathbb{R}^d). On considère un système de N particules identiques évoluant dans Λ . Notons $\mathbb{D} := \Lambda \times \mathbb{R}^d$ le fibré tangent du domaine et

$$Z_N := (x_1, v_1, \dots, x_N, v_N) \in \mathbb{D}^N, \quad X_N := (x_1, \dots, x_N) \text{ et } V_N := (v_1, \dots, v_N)$$

les coordonnées du système. On définit le Hamiltonien

$$(1.2.1) \quad \mathcal{H}_N(Z_N) := \frac{1}{2}|V_N|^2 + \mathcal{V}_N(X_N), \quad \mathcal{V}_N(X_N) := \alpha \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathcal{V}\left(\frac{|x_i - x_j|}{\varepsilon}\right)$$

où \mathcal{V} est le potentiel d'interaction entre deux particules. On a séparé l'énergie cinétique du système $|V_N|^2/2$ et l'énergie potentielle $\mathcal{V}_N(X_N)$. Les paramètres ε (le rayon des particules) et α seront centraux dans l'étude du comportement du système quand le nombre de particules tend vers l'infini.

Les particules suivent la dynamique Hamiltonienne définie par \mathcal{H}_N

$$(1.2.2) \quad \forall i \in [1, n], \begin{cases} \frac{d}{dt}x_i = \nabla_{v_i}\mathcal{H}_N(Z_n(t)) = v_i, \\ \frac{d}{dt}v_i = -\nabla_{x_i}\mathcal{H}_N(Z_N(t)) = \frac{\alpha}{\varepsilon} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \nabla \mathcal{V}\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Le potentiel \mathcal{V} caractérise notre système de particules. Idéalement nous souhaiterions comprendre le cas d'un potentiel de Lénard-Jones $\mathcal{V}(r) := r^{-12} - r^{-6}$ modélisant les interactions de Van der Waals, attractive à longue distance et répulsive à courte distance. Cependant l'étude d'un tel système est pour le moment hors de portée. Un autre cas important est l'interaction *via* la loi de puissance $\mathcal{V}(r) := r^{-s}$ (avec s positif), correspondant aux gaz de Riez.

En pratique, dans le cadre de la limite de densité faible, on ne pourra regarder que des potentiels symétrie sphérique, décroissants et à support compact (ou dans le cadre de [Ayi17] à décroissance très rapide).

4. Nous remercions Raphael Winter pour cette remarque.

Système des sphères dures

Le cas le plus simple en théorie cinétique collisionnelle est le système de sphères dures, où l'interaction se fait *via* le potentiel (formelle) d'exclusion (formelle)

$$\mathcal{V}(r) := \begin{cases} 0 & \text{if } |r| > 1 \\ \infty & \text{else} \end{cases}.$$

Dans le cas des sphères dures on se restreint à l'espace des phases

$$\mathcal{D}^N := \{Z_N, \mathcal{H}_N(Z_N) < \infty\}$$

qui est une variété à bord. On peut décomposer son bord comme l'union des

$$\partial\mathcal{D}_{i,j}^N := \{Z_N, |x_i - x_j| = \varepsilon\}.$$

Le système de particules évolue selon la dynamique hamiltonienne (les particules se déplacent en ligne droite à vitesse constante) à l'intérieur de \mathcal{D}^N . Lorsque la trajectoire touche un des $\partial\mathcal{D}_{i,j}^N$ (et donc que l'on a collision entre deux particules), on applique les lois de Descartes

$$(1.2.3) \quad \begin{cases} v_i(\tau^+) = v_i(\tau^-) - \frac{x_j(\tau) - x_i(\tau)}{|x_j(\tau) - x_i(\tau)|} \cdot \left(v_i(\tau^-) - v_j(\tau^-) \right) \frac{x_j(\tau) - x_i(\tau)}{|x_j(\tau) - x_i(\tau)|}, \\ v_j(\tau^+) = v_j(\tau^-) + \frac{x_j(\tau) - x_i(\tau)}{|x_j(\tau) - x_i(\tau)|} \cdot \left(v_i(\tau^-) - v_j(\tau^-) \right) \frac{x_j(\tau) - x_i(\tau)}{|x_j(\tau) - x_i(\tau)|} \end{cases}$$

avec τ l'instant où les particules se collisionnent.

Théorie de Cauchy du système de particules

La dynamique étant Hamiltonienne, \mathcal{H}_N est conservé au cours du temps. Dans le cas où le potentiel d'interaction est une fonction $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$, avec éventuellement une singularité à l'origine mais bornée inférieurement, le théorème de Cauchy-Lipschitz couplé à la compacité des lignes de niveau de \mathcal{H}_N sont suffisants pour prouver que le flot est défini pour tout temps. Cependant dans le cas des sphères dures, comme deux collisions impliquant une même particules peuvent avoir lieu simultanément, la dynamique ne peut pas être définie pour certaines données initiales. Néanmoins le théorème suivant dû à Roger K. Alexander (voir [Ale75]) assure que de telles situations n'arrivent presque jamais :

Théorème 1.2.1

La dynamique des sphères dures est bien définie Lebesgue-presque partout dans \mathcal{D}^N .

Une trajectoire est pathologique si deux collisions peuvent arriver dans un intervalle de temps de taille arbitrairement petite (ce qui prend en compte les collisions multiples impliquant au moins trois particules). L'idée de la preuve est de montrer que l'ensemble des données initiales permettant deux collisions sur un petit intervalle de temps de longueur δ est de taille $O(\delta^2)$. Ainsi en découpant un intervalle de temps $[0, T]$ en T/δ tranches de taille δ , le poids des données entraînant deux collisions dans une même tranche tend vers zéro avec δ . On peut alors faire tendre δ vers 0 et déduire que les données initiales menant à une trajectoire pathologique forment un ensemble de mesure nulle.

Le point crucial de la preuve est la conservation de la mesure de Lebesgue par la dynamique. Ainsi il est suffisant de faire des estimations sur la première tranche $[0, \delta]$ puis de les décaler sur les tranches suivantes $[k\delta, (k+1)\delta]$ ($k \in \{0, \dots, T/\delta\}$) grâce à la dynamique. Dans la suite, ce sera un des points limitants pour trouver un bon modèle pour les réflexions sur aux bords du domaine.

Borne sur le nombre de collisions

Plaçons-nous maintenant dans l'espace entier $\Lambda = \mathbb{R}^d$.

L'une des propriétés importantes du systèmes des sphères dures est que les particules ne peuvent n'avoir qu'un nombre de collisions fini. Une première preuve de ce résultat a été donné par Vaserstein [Vas79] dans le cas d'une large classe de systèmes de particules en interaction, puis simplifiée par Illner pour des sphères dures (voir [Ill89, Ill90]).

L'idée de la preuve est qu'à partir d'un instant τ_{cluster} , les particules se séparent en différents clusters s'éloignant les uns des autres⁵. La vitesse d'une particule étant bornée, elle ne peut pas sauter d'un cluster à l'autre et les collisions se font entre particules d'un même cluster. Or s'il y a une nouvelle interaction après τ_{cluster} , comme celle-ci est répulsive, elle conduira à séparer le cluster en de nouveaux clusters.

En fait il existe même une borne uniforme (en la donnée initiale) sur le nombre de collisions que peut avoir le billard. Une première borne a été exhibée par Burago, Ferleger, et Kononenko [BFK98] : il y a au plus $(32N^{3/2})^{N^2}$ collisions (N étant le nombre de sphères dures).

Notons que si l'on fait la distinction entre les collisions déviant beaucoup les particules et celles ne les déviant presque pas, il est possible d'améliorer les estimations. Denis Serre a montré ainsi que le nombre de ces collisions « fortes » est $O(N^2)$ (voir [Ser21]).

Dans le cas d'interactions *via* des potentiels plus réguliers, de tels résultats semblent difficiles à obtenir. En particulier, il est apparu qu'au lieu des collisions, on veut borner le nombre de fois où deux particules peuvent être à distance ε . On peut ainsi imaginer des situations avec une particule entre deux autres, oscillant rapidement et se touchant un très grand nombre de fois.

1.2.2 Mesure de Gibbs

Nous allons maintenant construire une mesure sur notre système de particules. Notons déjà que comme la dynamique est hamiltonienne, la mesure de Lebesgue est conservée par la dynamique. Cependant, l'espace des phases n'étant pas compact, la mesure n'est pas de masse finie. Le Hamiltonien du système étant conservé, toutes les mesures du type $F(\mathcal{H}(Z_N))dZ_N$ vont être des mesures invariantes du système.

Comme on veut regarder des mesures de probabilité, on se restreint au cas d'un domaine compact, *id est* $\Lambda := \mathbb{T}^d$.

Ensemble micro canonique

Une première solution est de regarder le cas où l'énergie du système est fixée, à NE (avec E l'énergie moyenne des particules), en prenant pour F la mesure de Dirac. Cela définit la mesure de Gibbs micro-canonique :

$$(1.2.4) \quad d\mathbb{P}_\varepsilon^{\text{micro}}(Z_N) := \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \delta_{\mathcal{H}_N(Z_N) - NE} = \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} |\nabla \mathcal{H}_N(Z_N)| d\sigma(Z_N)$$

où $d\sigma$ est la mesure de Hausdorff sur la surface $\{\mathcal{H}_N(Z_N) = NE\}$ et \mathcal{Z}_ε est une constante de normalisation. Dans le cadre d'un modèle avec un nombre fini d'états, cela revient à imposer une mesure uniforme à support sur l'ensemble des état d'énergie NE . Cependant cette mesure n'est pas très pratique à utiliser, notamment à cause de la géométrie de la surface $\{\mathcal{H}_N(Z_N) = NE\}$ qui peut être relativement compliquée à comprendre.

5. On dit que le flot est dispersif.

Ensemble canonique

En pratique, on va choisir $F(p) := \exp(-\beta p)$ et définir la mesure de Gibbs canonique comme

$$(1.2.5) \quad d\mathbb{P}_\varepsilon^{\text{can}}(Z_N) := \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{Nd}{2}} \exp(-\beta \mathcal{H}_N(Z_N)) dZ_N,$$

avec d la dimension du domaine. Cela revient à fixer la température du système $1/\beta$ plutôt que son énergie.

Le choix de cette mesure par rapport aux autres possibilités a plusieurs motivations possibles. Premièrement dans le cas où les particules ne sont pas en interaction (α est égale à zéro), on retrouve la distribution Gaussienne sur les particules, qui est complètement factorisée.

On peut donner une explication formelle plus physique : pour une mesure positive $f_N(Z_N)dZ_N$, on peut construire son entropie comme

$$(1.2.6) \quad \mathcal{S}(f_N) := \int \log f_N(Z_N) f_N(Z_N) dZ_N.$$

Cette fonctionnelle mesure la concentration de la mesure $f_N(Z_N)dZ_N$ (on peut la voir aussi comme la quantité d'information du système, par analogie avec l'entropie de Shannon en théorie de l'information).

La mesure de Gibbs canonique est alors la mesure de probabilité qui minimise l'entropie du système à énergie fixée. En effet, définissant l'énergie moyenne et sa masse comme

$$\mathcal{E}(f_N) := \int \mathcal{H}_N(Z_N) f_N(Z_N) dZ_N, \quad \mathcal{M}(f_N) := \int f_N(Z_N) dZ_N (= 1),$$

on veut trouver les points critiques de la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(f_N, \lambda, \beta) := \mathcal{S}(f_N) + \lambda(\mathcal{M}(f_N) - 1) + \beta(\mathcal{E}(f_N) - NE)$$

où λ et β sont des multiplicateurs de Lagrange. On applique une méthode variationnelle : pour toute fonction test g_N et tout réel s au voisinage de 0,

$$\mathcal{F}(f_N + s \cdot g_N, \lambda, \beta) - \mathcal{F}(f_N, \lambda, \beta) = s \cdot \int (1 + \lambda + \log f_N(Z_N) + \beta \mathcal{H}_N(Z_N)) g_N(Z_N) dZ_N + O(s^2).$$

Ainsi si f_N est un point critique, on a l'égalité suivante

$$1 + \lambda + \log f(Z_N) + \beta \mathcal{H}_N(Z_N) = 0 \Rightarrow f(Z_N) = \frac{1}{\exp(1 + \lambda)} e^{-\beta \mathcal{H}_N(Z_N)}$$

et $f_N(Z_N)dZ_N$ est la mesure de Gibbs canonique.

Ensemble grand canonique

Il existe des cas où fixer le nombre de particules est encore trop contraignant. On définit alors l'espace des phases grand canonique comme l'union disjointe de tout les \mathbb{D}^n :

$$(1.2.7) \quad \mathcal{D} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{D}^n,$$

et dans le cas des sphères dures,

$$(1.2.8) \quad \mathcal{D}_\varepsilon := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^n$$

et on note \mathcal{N} le nombre de particules. On peut alors étendre la dynamique Hamiltonienne à \mathcal{D} tout entier : lorsqu'il y a n particules, la dynamique $\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t)$ suit la dynamique Hamiltonienne dans \mathcal{D}^n (on fait de même pour les sphères dures) pour la donnée initiale $\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(0)$.

On peut alors définir la mesure de Gibbs grand-canonique comme

$$(1.2.9) \quad d\mathbb{P}^{\text{grand}}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}) := \frac{1}{Z_{\varepsilon}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta^{1/2} \mu}{(2\pi)^{d/2}} \right)^n \mathbb{1}_{\mathbb{D}^n} e^{-\beta \mathcal{H}_n(\mathbf{Z}_n)} d\mathbf{Z}_n.$$

Ainsi le nombre de particules suit presque une loi de Poisson de paramètre μ , et l'espérance du nombre de particules est environ $\mathbb{E}^{\text{can}}[\mathcal{N}] \simeq \mu$.

Dans la limite où le nombre de particules tend vers l'infini (et que les autres paramètres α et ε suivent la bonne loi d'échelle), on espère que les ensembles micro-canoniques, canoniques et grand-canoniques décrivent un modèle équivalent. Au cours de ce travail nous n'avons pas essayé de montrer un tel résultat et nous n'avons traité que les cas canonique ou grand-canonique selon ce qui était le plus pratique.

1.2.3 Condition de Bord

Dans les paragraphes précédents nous n'avons regardé que le cas d'un domaine compact sans bord, à savoir le tore plat $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$. Dans le cas de l'espace entier, il est possible d'appliquer la même preuve pour construire la dynamique, mais la construction d'une loi de probabilité d'équilibre n'est plus possible. Le présent paragraphe reprend un peu le sujet de la partie 1.1.2, mais davantage du point de vue de la dynamique.

Dans le cas d'un domaine à bords (connexe à bord régulier), on doit trouver une modélisation de la loi de réflexion des particules au bord.

Nous supposons dans la suite que le domaine Λ est un ouvert connexe dont le bord $\partial\Lambda$ est une sous-variété \mathcal{C}^{∞} .

Une première solution est d'imposer une réflexion spéculaire des particules au bord : quand une particule arrive avec une vitesse $v(\tau^-)$ au point x du bord, on définit $n(x)$ le vecteur normal pointant vers l'intérieur et la particule est réfléchiée avec la vitesse

$$(1.2.10) \quad v(\tau^+) := v(\tau^-) - 2n(x) \cdot v(\tau^-)n(x).$$

Notons que la norme de la vitesse est conservée au cours de la réflexion et que la mesure de Lebesgue est conservée par la réflexion. On peut donc, comme dans le cas des sphères dures, définir la dynamique Hamiltonienne avec en plus une réflexion au bord du domaine.

Ce modèle a été traité par Théophile Dolmaire au cours sa thèse pour dériver l'équation de Boltzmann.

Une généralisation de ce type de modèle s'obtient par l'ajout d'un potentiel extérieur $V(x)$ confinant les particules. Dans ce cas, le Hamiltonien du système devient

$$\mathcal{H}_N(Z_N) := \frac{1}{2}|V_N|^2 + \alpha \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathcal{V} \left(\frac{|x_i - x_j|}{\varepsilon} \right) + \sum_{i=1}^N V(x_i).$$

Il a été étudié par Raffaele Esposito, Yan Guo et Rossana Marra dans le cadre de la dérivation de l'équation de Boltzmann avec un potentiel externe (voir [EGM11]).

Les deux précédents modèles décrivent un système fermé et déterministe. Dans le cadre de la physique statistique hors équilibre, un problème est de trouver un état stationnaire en dehors de l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire pour lequel il existe un flux de chaleur

non nul. On espère rencontrer de telles propriétés pour un système de particules en contact avec un réservoir à différentes températures au bord du domaine.

Un choix naturel pour modéliser un bord avec une température est d'imposer une réflexion Maxwellienne. La dynamique n'est alors plus déterministe mais stochastique : lorsque qu'une particule atteint le bord avec une vitesse v_{in} au point x , sa vitesse réfléchie v_{out} est donnée par la loi

$$d\mathbb{P}_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}}) = (v_{\text{out}} \cdot n(x))_- M_w(x, v_{\text{out}}) dv_{\text{out}}, \quad M_w(x, v) := \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2T(x)}}}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}} T(x)^{\frac{d+1}{2}}}$$

avec $T(x)$ la température au point x et $n(x)$ le vecteur normal à $\partial\Lambda$ orienté vers l'extérieur du domaine.

Malheureusement, nous sommes pour le moment incapables de traiter ce modèle. Une première difficulté est de montrer que la dynamique des particules est bien définie. En effet, le système n'étant pas réversible, on ne peut pas appliquer la stratégie employée par Alexander dans le cas des sphères dures. Le second problème est d'obtenir l'existence d'une solution stationnaire. Si la température au bord n'est pas constante, on ne sait pas s'il existe une solution.

Notons que ces deux points sont propres aux sphères dures. Si les potentiels d'interaction sont lisses, on peut montrer que le processus est bien défini et qu'il admet une mesure stationnaire (voir [GLP81] pour le cas d'un domaine convexe et [GKI85] pour des domaines plus généraux).

Dans tout les cas, si une mesure stationnaire existe, il semble qu'elle soit unique. Or dans la méthode usuelle de dérivation de l'équation de Boltzmann, on utilise qu'il existe une famille infinie de solution stationnaire pour donner des estimations *a priori* sur le système.⁶

Le modèle suivant permet de garder le caractère stochastique du cas précédent tout en simplifiant suffisamment le modèle pour être traitable. Lorsque qu'une particule atteint le bord avec une vitesse v_{in} au point x , on suppose que sa vitesse réfléchie v_{out} garde la même énergie cinétique, mais sa direction est aléatoire. Ce type de loi est traité dans [CPSV09], dans le cas où il n'y a qu'une unique particule (la norme de la vitesse n'évoluant pas on peut la fixer égale à 1).

Un cas particulier important est la loi de réflexion isotrope :

$$d\mathbb{P}_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}}) = c_d \frac{(v_{\text{out}} \cdot n(x))_+}{|v_{\text{out}}|^d} \delta_{|v_{\text{out}}| - |v_{\text{in}}|} dv_{\text{out}},$$

avec c_d une constante de normalisation donnée par

$$(1.2.11) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} c_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k \pi^{k-1} k!} \\ c_{2k+1} = \frac{k!}{\pi^k} \end{cases}.$$

Notons que si on récrit la loi de réflexion sous la forme (1.1.24), $K_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}})(v_{\text{out}} \cdot n(x))_- dv_{\text{out}}$ et $K_x(v_{\text{out}}|v_{\text{in}})(v_{\text{in}} \cdot n(x))_- dv_{\text{in}}$ sont des mesures de probabilité (la loi de réflexion est en un certain sens réversible). Il est alors possible de montrer que la dynamique des sphères dures est bien posée. Ce fut un des résultats de mon travail de doctorat (voir le paragraphe 3.2 du chapitre 3).

6. En fait il suffirait de construire une famille infinie de *sur-solutions*, vérifiant uniquement des inégalités de bord. Nous n'avons pour l'instant pas d'idée pour une méthode de construction.

Dans les modèles précédents, on n'a pas de modèle microscopique d'interaction de la paroi et de la particule. Pour l'instant, trouver un modèle d'interaction microscopique entre la particule et le bord du domaine reste un problème ouvert.

Dans [GLR82, FGS84, GLR86], les auteurs considèrent un modèle explicite de réservoir de température (un *bain thermalisé* ou *Heat Bath* en anglais). On regarde une famille de molécules lourdes confinées dans un domaine borné Λ . Elles interagissent avec un gaz de particules légères (modélisant un réservoir de température), distribuées initialement selon une loi de Poisson à température fixée. Les auteurs montrent que le système est bien posé et qu'il existe une mesure stationnaire.

1.3 Passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique

1.3.1 Scaling de Boltzmann-Grad et théorème de Lanford

Pour obtenir une description asymptotique du système dans la limite N (ou μ) tend vers l'infini, on doit spécifier une lois d'échelle entre N , ε (la longueur typique d'interaction) et α (l'intensité de l'interaction).

Au cours de cette thèse nous nous sommes principalement intéressés à des gaz peu denses. Dans ces modèles, les interactions ont un faible rayon d'action ($\varepsilon \rightarrow 0$) et sont intenses (α est fixé égal à 1). On peut ainsi comprendre les interactions comme des chocs. Il faut maintenant fixer la relation entre N (ou μ dans le cas de l'ensemble grand canonique). On souhaite qu'en moyenne, une particule ait une collision quand elle parcourt la distance \mathfrak{d} (le *libre parcours moyen*).

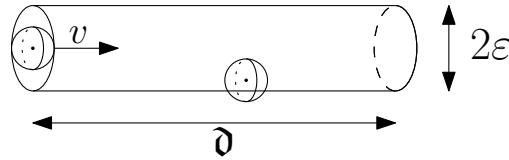


FIGURE 1.4 – La première particule va rencontrer la seconde

Lorsqu'une particule traverse cette distance, elle occupe en tout un volume de l'ordre de $\varepsilon^d + \varepsilon^{d-1}\mathfrak{d} \simeq \mathfrak{d}\varepsilon^{d-1}$. On a collision si une particule est présente dans ce volume. La densité de particule étant N/L^3 (avec L une distance typique du système, comme par exemple la taille du domaine), on a $1 = N\varepsilon^{d-1}\mathfrak{d}/L^d$, ou $\mathfrak{d}^{-1} = N\varepsilon^{d-1}$ en choisissant la convention $L = 1$. C'est le régime de densité faible, aussi appelé de Boltzmann-Grad (décrit pour la première fois par Bobolyugov dans [Bog60] et Grad dans [Gra49, Gra58]).

Donnons maintenant une version simplifier du théorème de dérivation de Boltzmann (on choisit de regarder l'ensemble canonique pour simplifier la présentation).

Soit $f_0 \in L^1(\Lambda \times \mathbb{R}^d)$ une fonction positive d'intégrale 1. À l'instant initial on choisit la distribution de particule $F_N^0 \simeq f_0^{\otimes N} dZ_N$ (les particules sont presque indépendantes les unes des autres).

Comme le nombre de particules tend vers l'infini, on doit regarder le comportement typique d'un nombre fini de particules. On définit la s -ième marginale du système (à l'instant initial) comme la distribution typique de s particules

$$(1.3.1) \quad f_N^{0,(s)}(Z_s) := \int F_N^0(Z_N) dz_{s+1} \cdots dz_N.$$

Le système évolue alors selon la dynamique Hamiltonienne, avec $F_N(t, Z_N) dZ_N$ la distribution de particules au temps t , et $f_N^{(s)}(t, Z_s)$ sa s -ième marginale. Alors

Théorème 1.3.1 (Théorème de Lanford)

Si il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, v) \in \mathbb{D}$, $f_0(x, v) \leq \exp -\frac{|v|^2}{2}$, alors, dans le régime de Boltzmann-Grad $N\varepsilon^2\mathfrak{d} = 1$,

$$(1.3.2) \quad \forall t \in [0, \mathfrak{t}], f_N^{(1)}(t, \cdot) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(t, \cdot)$$

où \mathfrak{t} est un temps caractéristique du système et $f(t, \cdot)$ est solution de l'équation de Boltzmann

$$\partial_t f(t, z) + v \cdot \nabla_x f(t, z) = \frac{1}{\mathfrak{d}} Q(f(t, z), f(t, z)).$$

Nous donnerons plus tard un sens précis à la convergence.

1.3.2 Ordre de Grandeur

Nous allons maintenant calculer l'ordre de grandeur du temps caractéristique du système \mathfrak{t} , définie comme la durée moyenne pour une particule entre deux collisions successive, ainsi que le libre parcours moyen \mathfrak{d} .

Premièrement calculons la vitesse typique \mathfrak{v} d'une particule dans un gaz. En notant θ la température, m la masse molaire des molécules dans un gaz, k_B la constante de Boltzmann et \mathcal{N}_A la constante d'Avogadro. L'énergie moyenne d'une particule est donné par $k_B\theta$. Dans notre système la seule énergie propre d'une particule est son énergie cinétique. Cela permet de donner une estimation de \mathfrak{v}

$$\frac{1}{2}(m/\mathcal{N}_A)\mathfrak{v}^2 \simeq k_B\theta \Rightarrow \mathfrak{v} \simeq \sqrt{\frac{k_B\mathcal{N}_A\theta}{m}}.$$

La densité de particule N/L^3 est donné par la loi des gaz parfaits : en notant avec P la pression la pression du gaz

$$N/L^3 = \frac{P}{k_B\theta}.$$

On peut maintenant appliquer le scaling de Boltzmann Grad :

$$\mathfrak{d} = \frac{L^3}{N\varepsilon^2} = \frac{(\mathcal{N}_A k_B)\theta}{\mathcal{N}_A P \varepsilon^2}, \quad \mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{v}} = \frac{L^3}{\mathfrak{v} N \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{m(k_B \mathcal{N}_A)\theta}}{\mathcal{N}_A P \varepsilon^2}.$$

On peut faire maintenant une application numérique. On a

$$\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \text{ et } (k_B \mathcal{N}_A) = 8,3 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ mol}^{-1}.$$

La masse molaire de l'air et le diamètre d'une particule sont respectivement égales à⁷

$$m = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ kg mol}^{-1}, \quad \varepsilon = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

Enfin dans les conditions atmosphériques usuelles (au niveau de la mer),

$$\theta = 18^\circ\text{C} = 2,9 \cdot 10^2 \text{ K}, \quad P = 1,0 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2},$$

ce qui donne

$$\mathfrak{t} = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ s}, \quad \mathfrak{d} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m} \text{ et } \mathfrak{v} = 2,9 \cdot 10^2 \text{ m s}^{-2}.$$

Notons d'une part que l'approximation de faible densité est vérifiée ($\mathfrak{d} \gg \varepsilon$). Cependant les théorèmes donnant la convergence de la distribution de particule vers la solution de l'équation de Boltzmann ne sont valables que des temps de l'ordre de \mathfrak{t} , ce qui est très court.

7. On reprend les valeurs pour un air sec composé de 80% de diazote et 20% de dioxygène. Les valeurs des différentes constantes sont tirées des pages Wikipedia *Constante universelle des gaz parfaits*, *Nombre d'Avogadro* et *Air*. Notons que dans notre calcul seul l'ordre de grandeur du résultat est important.

1.3.3 Autre scaling du gaz de particule en interaction

Le scaling de Boltzmann-Grad (ou de faible densité) n'est pas la seule échelle intéressante d'un point de vue physique. Selon que les interactions se font à grande ou petite échelle, le comportement limite du système change radicalement. On peut grossièrement distinguer deux cas. Si les interactions se font à longue distance, le système limite est plutôt dispersif (au sens où il ressemble beaucoup à l'équation $\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0$), décrit par une équation ressemblant à l'équation de Vlasov. Dans le cas d'interactions à courte distance, le mélange dû aux chocs impliquera un système limite diffusif (il ressemble à $\partial_t f - \Delta_v f = 0$) dont la dynamique ressemble à l'équation de Boltzmann. Notons une review de Nota, Velazquez et Winter sur l'ensemble des régimes possibles du système de particules (voir [NVW21b]).

Système en champ moyen

Rappelons que la limite de Boltzmann-Grad étudiée précédemment correspond à des interactions très intenses entre les particules, avec un faible rayon d'action. On peut étudier le cas inverse appelé la *limite de champ moyen* : on considère des particules interagissant *via* des interactions à longue portée mais de faible intensité. On choisit les coefficients tels que l'énergie cinétique soit du même ordre de grandeur que l'énergie potentielle, *i.e.* dans la formule (1.2.1), on fixe $\varepsilon = 1$ et $\alpha = 1/N$, le Hamiltonien du système devenant

$$\mathcal{H}_N(Z_N) := \frac{1}{2}|V_N|^2 + \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathcal{V}(|x_i - x_j|).$$

Ainsi la distribution des particules $F_N(t)$ vérifie l'équation de Liouville

$$\partial_t F_N(t) + V_N \cdot \nabla_{X_N} F_N(t) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ i \neq j}} \nabla \mathcal{V}(x_j - x_i) \cdot \nabla_{v_i} F_N(t) = 0.$$

On peut alors intégrer cette équation par rapport à z_2, \dots, z_N (on retrouve ici la première étape de la hiérarchie BBGKY qui sera décrite au paragraphe 1.3.4) : en utilisant que $F_N(t)$ est stable par permutation de ses indices,

$$\partial_t f_N^{(1)}(t, z) + v \cdot \nabla_x f_N^{(1)}(t, z) - \frac{1-N}{N} \int \nabla \mathcal{V}(x - x_2) \cdot \nabla_v f_N^{(2)}(t, z, z_2) dz_2 = 0.$$

En supposant que dans la limite $N \rightarrow \infty$, $f_N^{(2)}(t)$ vérifie l'hypothèse de chaos $f_N^{(2)}(t) \simeq f_N^{(1)}(t) \otimes f_N^{(1)}(t)$, on trouve que $f_N^{(1)}$ converge formellement vers $f(t)$ solution de l'équation de Vlasov

$$(1.3.3) \quad \begin{cases} \partial_t f(t) + v \cdot \nabla_x f(t) - \nabla_x (\mathcal{V} \star \rho(t)) \cdot \nabla_v f(t) = 0 \\ \rho(t, x) := \int f(t, x, v) dv. \end{cases}$$

Roland Dobrushin a donné une première preuve de la validité de la limite de champ moyen dans le cas où le potentiel \mathcal{V} est \mathcal{C}^2 à support compact (voir [Dob79]). Il s'est appuyé sur le fait que la mesure empirique

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(x_i(t), v_i(t))}$$

est une solution au sens des distributions de l'équation de Vlasov. L'auteur donne alors une estimation de stabilité pour les solutions de (1.3.3) pour une certaine distance maîtrisant la convergence faible (une distance de Wasserstein). Cela assure la convergence faible pour tout temps.

Le cas de potentiels plus singuliers (typiquement le potentiel de Coulomb $\mathcal{V}(r) = 1/r$ en dimension 3) est un problème difficile. La mesure empirique n'est plus une solution de l'équation de Vlasov dans un sens acceptable et il faut trouver une nouvelle stratégie. Notons les travaux de Sylvia Serfaty [DS18] sur une nouvelle preuve de la convergence des mesures empiriques dans le cas d'interactions singulières (voir aussi [JW16, BJW20, BJW19] qui utilisent le même type d'idée), et [BJS22] pour une autre méthode (notamment en tirant partie d'un bruit supplémentaire sur la vitesse des particules).

Scaling de couplage faible

Regardons maintenant un régime intermédiaire entre le champ moyen et le scaling de Boltzmann-Grad : le *couplage faible*. Dans ce régime, les interactions se font à faible distance (on peut encore parler de collision) mais sont moins intenses que dans la limite de Boltzmann-Grad. De l'autre côté la densité de particules est beaucoup plus forte que pour le régime de densité faible. Ainsi une particule aura plein collision la déviant peu.

Précisons le scaling. On se place en dimension 3 et on regarde des interactions *via* un potentiel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, à symétrie sphérique, décroissant et à support compact. On définit \mathfrak{d} par $N\varepsilon^2 = \mathfrak{d}^{-1}$. On rappelle le Hamiltonien (1.2.1) du système de particules

$$\mathcal{H}_N(Z_N) := \frac{1}{2}|V_N|^2 + \alpha \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathcal{V}\left(\frac{|x_i - x_j|}{\varepsilon}\right).$$

L'intensité de l'interaction est liée au libre parcours moyen⁸ \mathfrak{d} par $\alpha^2 = \mathfrak{d}$.

Le cas le plus intéressant est l'échelle du couplage faible où $\alpha = \varepsilon^{1/2}$. Dans cette échelle, la densité des particules est constante $N\varepsilon^3 = 1$. Dans ce cadre on espère montrer que la première marginale $f_N^{(1)}(t)$ converge vers la solution de l'équation de Landau

$$\partial_t f(t) + v \cdot \nabla_x f(t) = \mathcal{A} \nabla \cdot \int \frac{P_{v-v_*}^\perp}{|v - v_*|} (\nabla f f_* - f \nabla f_*) dv_*$$

pour une constante de diffusion $\mathcal{A} > 0$, différente de celle calculée lorsque l'on passe de l'équation de Boltzmann à l'équation de Landau.

Aucun résultat de convergence dans la limite de couplage faible n'a pour le moment été prouvé, même dans le cas où l'on se restreint au temps court. Il existe néanmoins quelques résultats de *consistance* de l'équation, *i.e* montrer que l'équation de Landau est au moins valable au temps 0. Notons les travaux de Bobylev, Pulvirenti et Saffirio [BPS13] et Winter [Win21].

Enfin notons le cas *collisions rasantes* où l'on prend la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\mathfrak{d} \rightarrow 0$, mais en gardant $\mathfrak{d} \gg \varepsilon$. Ce scaling est plus simple à traiter que le couplage faible et l'on peut noter quelques résultats dans le cas du gaz de Lorentz ou d'une particule marquée dans un gaz (voir [DR01, Cat18]). L'un des projets abordés au long de cette thèse était de traiter cette limite dans le cadre des fluctuations autour de l'équilibre (voir les paragraphes 2.2 et 2.3).

8. On peut montrer que c'est le seul scaling pertinent dans le cas de potentiels d'interaction lisses à support compact, notamment pour le passage de l'équation de Boltzmann à l'équation de Landau. Si on regarde des potentiels d'interaction avec une singularité $\mathcal{V}(r) \underset{0}{\sim} 1/r$, on doit choisir $\mathfrak{d} = \varepsilon^2 |\log \varepsilon|$.

	Intensité α	Portée ε	Équation limite
Boltzmann-Grad	$\alpha = 1$	$N\varepsilon^2 = 1$	Équation de Boltzmann
Champ moyen	$\alpha = N^{-1}$	1	Équation de Vlasov
Couplage faible	$\alpha = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$	$N\varepsilon^3 = 1$	Équation de Landau
Collision rasante	$\alpha \gg \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ $\alpha = \log \log \varepsilon ^{-1}$	$N\varepsilon^2 = \alpha^2$	Équation de Landau

FIGURE 1.5 – Résumé des différentes limites d'échelle d'un système de particules

Comportement en temps long dans un système en champ moyen

Revenons maintenant au cas du système en champs moyen. Le système est décrit asymptotique, sur tout intervalle de temps finis, par l'équation de Vlasov (1.3.3). C'est une équation réversible, contrairement à l'équation de Boltzmann. Cependant si l'on regarde le comportement du système sur des temps beaucoup plus longs ($t = O(N)$), Balescu et Lénard (voir [Bal75]) se sont aperçus qu'il existait un phénomène de relaxation forte (quantifié) pour le système de particules, et que la distribution moyenne des vitesses

$$g_N^{(1)}(t, v) := \int F_N(t, Z_N) dx_1 dz_2 \cdots dz_N$$

converge formellement vers $g(t)$ solution de l'équation de Balescu-Lennard :

$$(1.3.4) \quad \partial_t g(t) = Q_{LB}(g, \nabla_v g)$$

où l'opérateur de collision est défini par

$$(1.3.5) \quad \begin{aligned} Q_{LB}(g, \nabla_v g) &:= \nabla_v \cdot \int B(v, v - v_*, \nabla_v g) (\nabla g(v)g(v_*) - g(v)\nabla g(v_*)) dv_*, \\ B(v, v - v_*, \nabla_v g) &= \int_{\mathbb{R}^3} (k \otimes k) \pi \hat{\mathcal{V}}(k) \frac{\delta_{k \cdot (v - v_*)}}{|\varepsilon(k, k \cdot v, \nabla g)|^2} dk, \\ \varepsilon(k, k \cdot v, \nabla g) &= 1 + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \hat{\mathcal{V}}(k) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{h \cdot \nabla g(v_*)}{k \cdot (v - v_*) - i\delta} dv_*. \end{aligned}$$

Cette équation ressemble à l'équation de Landau, et a les mêmes propriétés formelles (conservation des masse, impulsion et énergie, H-théorème...). L'équation étant fortement non linéaire, construire des solutions est assez difficile. Notons un résultat d'existence et d'unicité montré par Mitia Duerrinckx et Raphael Winter pour des données initiales proches de l'équilibre Gaussien.

Comme dans le cas de la limite de couplage faible, les seuls résultats de validité de l'équation de Balescu-Lénard sont des résultats de consistance. Plus précisément, il existe une suite $t_N \rightarrow \infty$, $t_N \ll N$ tel que pour tout $\tau > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\partial_t g_N)|_{t=\tau t_N} := Q_{LB}(g_0, \nabla_v g_0).$$

Trouver une preuve dans le cas $t_N = N$ revient à montrer la validité de l'équation de Balescu-Lénard. Dans [Due21], Mitia Duerinckx arrive à une preuve pour $t_N = (\log N)^{1-\delta}$, $\delta \in (0, 1)$. Ce temps de validité peut être amélioré si on considère la version linéaire ou linéarisée du système (autour de l'équilibre). Ainsi Mitia Duerinckx et Laure Saint-Raymond réussirent à atteindre le temps $t_N = N^r$ pour un certain $r < 1$ (voir [DSR21]).

1.3.4 Hiérarchie BBGKY et formulation précise du théorème de Lanford

Nous donnons maintenant une idée de la preuve du théorème de Lanford. Pour simplifier la présentation, on ne regardera que le système des sphères dures dans l'ensemble canonique. On fait le choix de coordonnées réduite $\tilde{v} = \frac{v}{\mathfrak{v}}$, $\tilde{x} = \frac{x}{L}$, $\tilde{t} = \frac{tL}{\mathfrak{v}}$ et $\tilde{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{d}}{L}$ (avec L une longueur caractéristique du domaine et \mathfrak{v} et \mathfrak{d} définie au paragraphe 1.3.2). On oubliera les \sim dans la suite.

Soit $f_0 \in L^1(\Lambda \times \mathbb{R}^d)$ une fonction positive d'intégrale 1. À l'instant initial on fait une hypothèse de chaos sur la distribution de particules F_N^0 , c'est à dire $F_N^0 \simeq f_0^{\otimes N}$ (les particules sont presque indépendantes les unes des autres).

Comme le système évolue selon la dynamique Hamiltonienne, la distribution de particule $F_N(t)$ est solution de l'équation de Liouville

$$(1.3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t F_N(t, Z_N) + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{x_i} F_N(t, Z_N) = 0 \\ F_N(t, \dots, x_i, v_i, \dots, x_j, v_j, \dots) \\ \quad = F_N(t, \dots, x_i, v'_i, \dots, x_j, v'_j, \dots) \text{ si } Z_N \in \partial \mathcal{D}_{i,j}^N. \end{array} \right.$$

avec (v'_i, v'_j) les vitesses précollisionnelles données en (1.2.3).

On peut alors intégrer cette équation pour obtenir une équation sur les marginales. Comme les particules sont indiscernables, leur distribution est stable par permutation des indices. On a alors

$$\begin{aligned} \partial_t f_N^{(s)}(t, Z_s) + \int \left[\sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{v_i} F_N(t, Z_N) \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{|x_i - x_j| > \varepsilon} \right] dz_{s+1} \cdots dz_N = 0 \\ f_N^{(s)}(t, \dots, x_i, v_i, \dots, x_j, v_j, \dots) = f_N^{(s)}(t, \dots, x_i, v'_i, \dots, x_j, v'_j, \dots) \text{ si } Z_s \in \partial \mathcal{D}_{i,j}^s. \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties

$$(1.3.7) \quad \begin{aligned} \partial_t f_N^{(s)}(t, Z_s) + \sum_{i=1}^s v_i \cdot \nabla_{v_i} f_N^{(s)}(t, Z_s) \\ = (N-s)\varepsilon^{(d-1)} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^d} f_N^{(s+1)}(t, Z_s, x_i + \varepsilon\nu, v_{s+1}) ((v_i - v_{s+1}) \cdot \nu) d\nu dv_{s+1} \\ = (N-s)\varepsilon^{(d-1)} \sum_{i=1}^s \int f_N^{(s+1)}(t, \dots, x_i, v'_i, \dots, x_i + \varepsilon\nu, v'_{s+1}) ((v_{s+1} - v_i) \cdot \nu)_+ d\nu dv_{s+1} \\ \quad - \int f_N^{(s+1)}(t, Z_s, x_i + \varepsilon\nu, v_{s+1}) ((v_{s+1} - v_i) \cdot \nu)_+ d\nu dv_{s+1} \\ = (N-s)\varepsilon^{(d-1)} \sum_{i=1}^s \left(C_{s,s+1}^{\varepsilon, i, +} - C_{s,s+1}^{\varepsilon, i, -} \right) f_N^{(s+1)}(t, Z_s). \end{aligned}$$

avec les conditions de réflexion sur $\partial \mathcal{D}_{i,j}^s$.

On a alors une famille d'équation où la s -ième marginale dépend de la $(s+1)$ -ième. C'est la *hiérarchie BBGKY*, introduite indépendamment par Nicolaï Bogolioubov [Bog60], Max Born et Herbert Green [BG46] John Kirkwood [Kir46] et Jacques Yvon [Yvo35].

On peut prendre la limite formelle de la hiérarchie BBGKY. En notant $f^{(s)}(t)$ les limites

formelles des $f_N^{(s)}(t)$, celles-ci vérifient la hiérarchie, dite de Boltzmann,

(1.3.8)

$$\begin{aligned} \partial_t f^{(s)}(t) + \sum_{i=1}^s v_i \cdot \nabla_{v_i} f^{(s)} &= \frac{1}{\mathfrak{d}} \sum_{i=1}^s \left(C_{s,s+1}^{0,i,+} - C_{s,s+1}^{0,i,+} \right) f^{(s+1)}, \\ C_{s,s+1}^{0,i,+} f^{(s+1)}(Z_s) &:= \int f_N^{(s)}(t, \dots, x_i, v'_i, \dots, x_i, v_{s+1}) ((v_{s+1} - v_i) \cdot \nu)_+ d\nu dv_{s+1}, \\ C_{s,s+1}^{0,i,+} f^{(s+1)}(Z_s) &:= \int f^{(s)}(t, Z_s, x_i, v_{s+1}) ((v_{s+1} - v_i) \cdot \nu)_+ d\nu dv_{s+1}. \end{aligned}$$

Notons que si l'on considère une condition initiale de la forme $(f_0^{(s)})_s := (f_0^{\otimes s})_s$, alors pour $f(t)$ solution formelle de l'équation de Boltzmann

$$(1.3.9) \quad \begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\mathfrak{d}} Q(f, f), \\ f(t=0) = f_0, \end{cases}$$

la famille $(f(t)^{\otimes s})_s$ est une solution formelle de la hiérarchie de Boltzmann.

En 1975, Oscar Erasmus Lanford a trouvé un cadre fonctionnel dans lequel les hiérarchies BBGKY et de Boltzmann ont toutes deux une unique solution, et dans le cas d'une donnée initiale presque factorisée et « continue », chaque $f_N^{(s)}(t)$ converge faiblement vers $f^{\otimes s}(t)$.

On énonce un théorème dans le cadre d'un domaine sans bord, *i.e.* $\Lambda := \mathbb{R}^d$ ou \mathbb{T}^d , et dans le cadre canonique (il existe un théorème similaire dans le cadre grand canonique).

Théorème 1.3.2

Soit f_0 une fonction continue sur $\Lambda \times \mathbb{R}^d$ et une suite de distributions de probabilité F_N^0 telles qu'il existe deux constantes $\beta > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ telles que $f_0(x, v) \leq e^{-\beta \frac{|v|^2}{2} - \gamma}$ et que les marginales $f_N^{0,(s)}$ de F_N^0 vérifient

$$(1.3.10) \quad \sup_{s \in \mathbb{N}} \sup_{Z_s \in \mathbb{D}^s} f_N^{0,(s)}(Z_s) e^{\beta \frac{|V_s|^2}{2} + s\gamma} \leq 1,$$

$$(1.3.11) \quad \sup_{s \in \mathbb{N}} \sup_{Z_s \in \mathbb{D}^s} \left| \prod_{1 \leq i < j \leq s} \mathbb{1}_{|x_i - x_j| > \varepsilon} \left(f_N^{0,(s)}(Z_s) - f_0^{\otimes s}(Z_s) \right) e^{\beta \frac{|V_s|^2}{2} + s\gamma} \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Alors pour tout temps $t \in [0, \mathfrak{d} \frac{C e^{-\gamma}}{\beta^2}]$ (avec \tilde{C} une constante ne dépendant que de la dimension), dans le scaling de Boltzmann-Grad $\mathfrak{d}^{-1} = N \varepsilon^{d-1}$

$$f_N^{(s)}(t, \cdot) \rightarrow f^{\otimes s}(t, \cdot) \text{ presque partout sur } \mathbb{D}^s$$

avec $f(t, \cdot)$ solution classique de l'équation de Boltzmann (1.3.9).

Pour construire une donnée initiale presque factorisée, on peut considérer la distribution suivante de particules

$$(1.3.12) \quad F_N^0(Z_N) := \frac{1}{Z_\varepsilon(f_0)} \prod_{i=1}^N f_0(z_i) \prod_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{1}_{|x_i - x_j| \geq \varepsilon}$$

Elle vérifie les conditions du théorème (1.3.10) et (1.3.11). On peut alors interpréter le théorème de Lanford comme un résultat de propagation du chaos faible : si à l'instant

initial les particules sont presque indépendantes, alors cette quasi-indépendance se propage au cours du temps.

Le théorème a été étendu au cas d'interactions via un potentiel à support compact par Francis King (voir [Kin75]). Dans ce cas il n'est pas possible d'utiliser directement les marginales pour construire la hiérarchie BBGKY et il faut un peu modifier leur définition pour retrouver une hiérarchie d'équations.

Notons que dans sa formulation précédente, la convergence se fait dans un sens très faible et la vitesse de convergence n'est pas estimée. Des versions quantitatives du théorème ont été données par Mario Pulvirenti, Chiara Saffirio et Sergio Simonella (voir [PSS14]) et par Isabelle Gallagher, Benjamin Texier et Laure Saint-Raymond (voir [GSRT13]). Dans [Den18] de Ryan Delinger décrit précisément les sous-parties de $(\Lambda \times \mathbb{R}^d)^s$ sur lesquelles la convergence est uniforme (voir aussi [BGSRS18]).

Les preuves précédentes ne sont valables qu'en temps fini : pour $\gamma = \beta = 1$ on peut montrer que le temps de validité du théorème est de l'ordre de 0, 2. Un résultat en temps long a été obtenu par Reinhard Illner et Mario Pulvirenti (voir [IP89]) en se restreignant à un gaz peu dense dans l'espace entier : la distribution initiale vérifie

$$f_0(x, v) \leq C \exp(-\beta(|x|^2 + |v|^2))$$

pour C une constante suffisamment petite (et dépendant de β). Les effets dispersifs sont alors dominants et permettent de meilleures estimations *a priori* que dans le cadre du théorème de Lanford. C'est à ce jour le seul résultat en temps long pour la dérivation de l'équation de Boltzmann complète.

Notons un résultat sur d'un gaz composé d'un mélange de deux espèce de particules. Considérons un système composé de λN de sphères dures de rayon $R\varepsilon$ (les particules 1) et $(1-\lambda)N$ particules de rayon $r\varepsilon$ (les particules 2) avec $\lambda \in (0, 1)$, $R, r > 0$ ne dépendant pas de N . Dans [AMP22], Ioakeim Ampatzoglou, Joseph Miller et Nataša Pavlović montrèrent que dans le régime de Boltzmann-Grad $N\varepsilon^{d-1} = 1$, le système est décrit par une équation de Boltzmann à deux espèce :

$$(1.3.13) \quad \begin{cases} \partial_t f_1 + v \cdot \nabla_x f_1 = c_{1,1} Q_{1,1}(f_1, f_1) + c_{1,2} Q_{1,2}(f_1, f_2) \\ \partial_t f_2 + v \cdot \nabla_x f_2 = c_{2,1} Q_{2,1}(f_2, f_1) + c_{2,2} Q_{1,2}(f_2, f_2) \end{cases}$$

avec f_i la distribution des particules de type i .

Présentons maintenant quelques résultats quand le domaine Λ a des bords. Le cas d'un potentiel externe a été traité par Raffaele Esposito, Yan Guo et Rossana Marra (voir [EGM11]), et le cas de la réflexion élastique (du type) par Théophile Dolmaire (voir [Dol22]). Dans le cas de la réflexion Maxwellienne, les estimations utilisées par Lanford pour contrôler les hiérarchies BBGKY ne sont plus valables, et il n'existe pour l'instant aucun résultat sur ce type de système. Enfin le cas de la réflexion isotrope a été traité au cours de cette thèse (voir le paragraphe 2.1 le chapitre 3 et [LB22a]).

Le théorème de Lanford peut être vu comme une *loi des grands nombres*. On se place maintenant dans le cadre grand canonique et on considère pour $f_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive, d'intégrale 1. On construit la distribution

$$(1.3.14) \quad d\mathbb{P}_\varepsilon(\mathbb{Z}_\mathcal{N}) := \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n}{n!} \mathbb{1}_{\mathcal{N}=n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{1}_{|x_i - x_j| > \varepsilon} f_0^{\otimes n}(Z_n) dZ_n,$$

qui est une mesure chaotique en grand canonique.

On définit la *mesure empirique* du système de particule comme la mesure aléatoire π_ε^t qui a une fonction continue, bornée h sur $\Lambda \times \mathbb{R}^d$ associe

$$(1.3.15) \quad \pi_\varepsilon^t(h) := \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} h(z_i(t)).$$

On peut alors réexprimer le théorème 1.3.2 sous la forme

Théorème 1.3.3

Supposons que ε et μ vérifient le scaling de Boltzmann-Grad $\mu\varepsilon^{d-1} = \mathfrak{d}^{-1}$, soit une fonction $f_0 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue positive, d'intégrale 1 et vérifiant la borne $f_0(x, v) \leq \exp\left(-\beta\frac{|v|^2}{2} - \gamma\right)$ pour deux constantes $\beta > 0$ et γ . Alors pour tout $t \in [0, \mathfrak{d}\frac{C\varepsilon^{-\gamma}}{\beta^2}]$, pour toute fonction test $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{D})$, on a

$$(1.3.16) \quad \forall \delta > 0, \mathbb{P}_\varepsilon \left(\left| \pi_\varepsilon^t(h) - \int h(x, v) f(t, x, v) dx dv \right| > \delta \right) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0,$$

où $f(t)$ est solution de (1.3.9).

C'est une forme de convergence en probabilité. Il est possible, comme dans le cas canonique, de préciser la topologie de la convergence, et d'en estimer la vitesse.

Pour aller plus loin dans la description statistique des sphères dures, il est possible d'écrire un théorème central limite et un principe de grande déviation pour la mesure empirique. Ces résultats ont été obtenus pour les sphères dures⁹ et sur le temps court (le même temps que dans le théorème de Lanford) par Bodineau, Gallagher, Saint-Raymond et Simonella dans [BGSRS20a].

1.3.5 Un modèle de gaz simplifié : le gaz de Lorentz

Les résultats précédents étant valables uniquement sur un temps court, l'étape suivante est de dériver une équation cinétique sur le temps long. Une première solution est de regarder une version simplifiée du gaz de sphères dures : le gaz de Lorentz.

Dans ce modèle on tire une suite de points $(\bar{x}_i)_{i>0} \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ selon un processus de Poisson ponctuel de paramètre μ (la densité de particule), en autorisant deux particules à être à distance inférieure à ε . En chaque x_i on fixe un obstacle de taille ε , ce qui définit un potentiel aléatoire

$$(1.3.17) \quad \mathcal{V}_\varepsilon(y) := \alpha \sum_i \mathcal{V} \left(\frac{y - x_i}{\varepsilon} \right).$$

Finalement on introduit une unique particule mobile dans le système et l'on cherche à obtenir une description de sa distribution de probabilité.

Si on suppose que la densité de particules du background suit le scaling de Boltzmann Grad $\mu\varepsilon^{d-1} = \mathfrak{d}^{-1}$, en suivant le même principe que pour le gaz des sphères dures, on a seulement de rares interactions intenses avec les obstacles. Ainsi la distribution de la particule $f_\varepsilon(t, x, v)$ converge formellement vers $f(t, x, v)$, solution d'une équation de Boltzmann linéaire

$$(1.3.18) \quad \partial_t f(t) + v \cdot \nabla_x f(t) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (f(t, x, |v|\eta) - f(t, x, v)) b \left(\eta \cdot \frac{v}{|v|} \right) d\eta.$$

Notons que la forme du noyau s'explique par la conservation de l'énergie cinétique au cours du choc, et le fait que le système est invariant par rotation.

9. Ce résultat ne semble pas très difficile à adapter au cas de potentiel décroissants à support compact en suivant [Kin75, GSRT13].

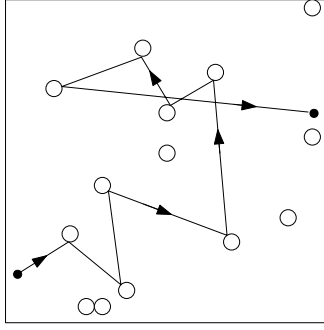


FIGURE 1.6 – Une particule (noire) évolue dans un gaz de Lorentz (les particules blanches).

La preuve de la validité de l'équation (1.3.18) a été donnée par Giovanni Gallavotti [Gal69], Herbert Spohn [Spo78] et Carlo Boldrighini, Leonid Bunimovich et Yakov Sinai [BBS83].

Dans le cas où les obstacles ne sont plus répartis selon un processus de Poisson, mais sur un réseau, il existe des trajectoires ne rencontrant aucun obstacle et faisant apparaître des effets de mémoire. L'équation de Boltzmann ne décrit alors plus le processus limite et on doit travailler dans un espace des phases élargi (ce fut remarqué dans un premier temps par Emanuele Caglioti et François Golse [CG08, CG10], voir aussi [MS19]).

Le gaz de Lorentz étant plus simple que celui des particules en interaction, les résultats de convergence sont donnés pour tout temps. Il est de plus possible d'obtenir des estimations quantitatives sur la convergence. On peut donc espérer pouvoir prendre de manière couplée la limite de Boltzmann-Grad et la limite de collisions rasantes, *i.e.* $\alpha \rightarrow 0$, $\mathfrak{d} \rightarrow 0$ (avec la bonne relation entre α et \mathfrak{d}).

Laurent Desvillettes et Valéria Ricci traitèrent dans [DR01] le cas d'un gaz de Lorentz en dimension 2, avec un potentiel d'interaction lisse à support compact et le scaling

$$\alpha = \varepsilon^r; \quad \mu\varepsilon = \mathfrak{d}^{-1} = \varepsilon^{-2r} \text{ avec } r \in (0, 1/8).$$

Dans ce cadre, ils parvinrent à dériver une équation de Fokker-Planck pour la distribution de la particule marquée, qui est un analogue linéaire de l'équation de Landau. Sur le même sujet notons, l'article de Detlef Dürr, Sheldon Goldstein et Joel Lebowitz traitant d'un scaling un peu différent menant au même type d'équation (voir [DGL87]).

Notons que dans un article précédent, Laurent Desvillettes et Mario Pulvirenti dérivèrent dans un cadre similaire une équation de Boltzmann linéaire sans cut-off, dont le noyau est associé à une loi de puissance (voir [DP99]). Pour ce faire, les auteurs considèrent un potentiel avec une singularité à l'origine et une coupure des interactions à grande distance.

Enfin notons un équivalent quantique du gaz de Lorentz, le modèle d'Anderson dont nous donnons une description rapide. On considère un potentiel aléatoire

$$(1.3.19) \quad \mathcal{V}_\varepsilon(x) := \sum_{q \in \mathbb{Z}^d} u_q \mathcal{V}(x - q)$$

ou $\mathcal{V}(x)$ est une fonction lisse, à symétrie sphérique et à support compact, et $(u_q)_q$ une famille de variables aléatoires *i.i.d.* avec $\mathbb{E}[u_0] = 0$ et $\mathbb{E}[u_0^2] < \infty$. On regarde une solution $\psi_t^\varepsilon(x)$ de l'équation de Schrödinger aléatoire

$$(1.3.20) \quad \partial_t \psi_t^\varepsilon = -\frac{1}{2} \Delta \psi_t^\varepsilon + \varepsilon \mathcal{V}_\varepsilon \psi_t^\varepsilon.$$

Ce système est décrit dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ par une équation de Boltzmann linéaire semblable à (1.3.18). On définit $W_t^\varepsilon(x, v)$ la transformé de Wigner de ψ_t^ε

$$(1.3.21) \quad W_t^\varepsilon(x, v) := \int \bar{\psi}_t^\varepsilon\left(x + \frac{z}{2}\right) \psi_t^\varepsilon\left(x - \frac{z}{2}\right) e^{izv} dz$$

qui joue un rôle similaire à la distribution de la particule mobile dans le gaz de Lorentz classique. Lorsque ε tend vers 0, W_t^ε est asymptotiquement décrit par $f_t(x, v)$ solution d'une équation de Boltzmann linéaire (1.3.18) pour un certain noyau $b\left(\eta \cdot \frac{v}{|v|}\right)$, calculable explicitement. Plus précisément, en faisant le changement d'échelle cinétique $(t, x, v) \rightsquigarrow (t/\varepsilon^2, x/\varepsilon^2, v)$, on a la convergence suivante

$$(1.3.22) \quad \mathbb{E}_{(u_q)_q} [W_{t/\varepsilon^2}(x/\varepsilon^2, v)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f_t(x, v).$$

La preuve de ce théorème fut trouvée par László Erdős et Horng-Tzer Yau (voir [Erd12], voir aussi [ESY08, ESY07] pour la limite diffusive du modèle d'Anderson).

1.3.6 Résultat en temps long pour le gaz de particules en interactions : les cas linéaire et linéarisé

Reprenons maintenant le modèle du gaz de particules en interaction dans le tore \mathbb{T}^d . Pour pouvoir obtenir des résultats en temps long sur ce système, il est nécessaire de regarder des versions « linéarisées » autour de l'équilibre. Il existe deux régimes de linéarisation.

La première méthode consiste à étiqueter une particule témoin et à la suivre dans un milieu à l'équilibre. On est alors dans un cadre proche du gaz de Lorentz abordé au paragraphe précédent et le système est décrit à la limite par l'équation de Boltzmann linéaire.

Dans la deuxième, on regarde des petites fluctuations autour de la mesure d'équilibre, qui sont décrites par l'équation de Boltzmann linéarisée.

Vers l'équation de Boltzmann linéaire

On marque la première particule, qui n'est maintenant plus échangeable avec les autres particules du système. Ces dernières sont distribuées initialement selon la mesure d'équilibre, et la première selon $M(v)g_0(x, v)$, avec g_0 une fonction continue, bornée. Ainsi à l'instant initial, la distribution des particules est

$$(1.3.23) \quad F_N^0(Z_N) := g_0(z_1) \frac{e^{-\mathcal{H}_N(Z_N)}}{(2\pi)^{\frac{dN}{2}} \mathcal{Z}_\varepsilon}.$$

C'est une perturbation à l'ordre $O(1)$ de l'équilibre. Dans ce cadre, la distribution de la première particule $f_N^{(1)}(t)$ converge formellement dans le scaling de Boltzmann-Grad $N\varepsilon^{d-1} = \mathfrak{d}^{-1}$ vers $Mg(t)$, avec g solution de l'équation Boltzmann linéaire

$$(1.3.24) \quad \begin{aligned} \partial_t g(t) + v \cdot \nabla_x g(t) &= \mathfrak{d}^{-1} \frac{1}{M} Q(Mg(t), M) \\ &= \mathfrak{d}^{-1} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} (g(t, x, v') - g(t, x, v)) M(v_*) b(v - v_*, \eta) dv_* d\eta \\ &=: \mathfrak{d}^{-1} Lg(t). \end{aligned}$$

L'avantage du cas linéaire est que le principe du maximum pour l'équation de Liouville donne

$$|F_N(t)| \leq \|g_0\|_{L^\infty} \frac{e^{-\mathcal{H}_N(Z_N)}}{(2\pi)^{\frac{dN}{2}} \mathcal{Z}_\varepsilon}.$$

En intégrant par rapport à $dz_2 \cdots dz_N$ on obtient une borne uniforme en N sur $f_N^{(1)}(t)$ (ce qui n'existe pas dans le cas d'une donnée initiale chaotique). Dans ce cadre, Henk van Beijeren, Oscar Lanford, Joel Lebowitz et Herbert Spohn (voir [LLSvB80]) dérivèrent cette équation pour un temps arbitrairement grand. Plus tard, Thierry Bodineau, Isabelle Gallagher et Laure Saint-Raymond ont donné une preuve quantitative de la convergence (voir [BGSr16]). On regarde pour l'instant un gaz de sphères dures.

Theorem 1.3.4

Dans le scaling de Boltzmann-Grad, si au temps initial le système de particules a pour densité (1.3.23), avec g_0 continue et bornée et en notant $g(t)$ la solution de l'équation de Boltzmann linéaire (1.3.24), alors la loi $f_N^{(1)}(t)$ de la première particule vérifie

$$(1.3.25) \quad \left\| f_N^{(1)}(t) - Mg(t) \right\|_{L^\infty} \leq C \left(\frac{t/\mathfrak{d}}{(\log \log N)^{\frac{A-1}{A}}} \right)^{\frac{A^2}{A-1}}$$

où $A \geq 2$ est une constante arbitraire et C dépend de $\|g_0\|_{L^\infty}$, A et d .

Notons que le théorème donne une convergence sur les intervalles de temps de la forme $[0, T(\log \log N)^{1/2}]$.

Plus tard ce résultat a été généralisé au cas de potentiels plus généraux. Nathalie Ayi a adapté la preuve au cas de potentiel à support non compact (voir [Ayi17]) : le potentiel d'interaction \mathcal{V} doit vérifier

$$|\nabla \mathcal{V}(x)| \leq \exp \left(- \exp \exp \left(\lambda(1 + |x|)^{2(d-1)} \right) \right)$$

pour une constante $\lambda > 0$. Sous cette hypothèse, elle réussit à dériver une équation de Boltzmann sans cut-off.

On peut utiliser le théorème précédent pour aller au échelle de temps supérieur et prendre la limite diffusive (ou limite hydrodynamique) du système. On fait le changement d'échelle pour le temps $\tau := t/\mathfrak{d}$, et on note $g_\mathfrak{d}(\tau, x, v) := g(\tau/\mathfrak{d}, x, v)$, solution de l'équation de Boltzmann linéaire

$$(1.3.26) \quad \mathfrak{d} \partial_\tau g_\mathfrak{d}(\tau) + v \cdot \nabla_x g_\mathfrak{d}(\tau) = \mathfrak{d}^{-1} L g_\mathfrak{d}(\tau).$$

Dans la limite $\mathfrak{d} \rightarrow 0$, la densité de particule

$$\rho_\mathfrak{d} := (\tau, x) \int g_\mathfrak{d}(\tau, x, v) M dv$$

converge au sens des distributions vers $\rho(\tau, x)$ solution d'une équation de diffusion

$$\begin{cases} \partial_\tau \rho(\tau, x) = \kappa \Delta \rho(\tau, x), \\ \rho(t=0) := \int g_0(x, v) M dv, \end{cases}$$

avec $\kappa > 0$ une constante de diffusion.

Le théorème 1.3.4 donne la convergence jusqu'au temps $t \sim \mathfrak{d}^{-1}$ dans la limite

$$(\log \log N)^{-\frac{A-1}{2A}} \ll \mathfrak{d} \ll 1$$

quand N tend vers l'infini et il est possible de mettre bout-à-bout les deux limite $N \rightarrow \infty$ et $\mathfrak{d} \rightarrow 0$. En choisissant $N \varepsilon^{d-1} \mathfrak{d} = 1$ et $\mathfrak{d}^{-1} = (\log \log N)^{1/2}$, on a la limite suivante

$$\int f_N^{(1)}(\tau/\mathfrak{d}, x, v) dv \rightarrow \rho(\tau, x)$$

ce qui montre la validité de l'équation de diffusion.

Dans [BGR17], les auteurs prouvent même qu'asymptotiquement (dans ce scaling), la trajectoire de la particule suit la loi du mouvement Brownien.

Il est possible aussi de prendre la limite des collisions rasantes (en dimension 3)

$$N \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow 0, N\varepsilon^2\mathfrak{d} = 1 \text{ et } \mathfrak{d} = \alpha^2.$$

Dans [Cat18], Nicolò Catapano traite le cas de potentiels lisses, bornés et à support compact en dimension 3 et $\mathfrak{d}^{-1} = (\log \log N)^{1/2}$. Il montre $f_N^{(1)}(t, x, v)$ converge vers $Mg(t)$, $g(t)$ solution de l'équation de Landau linéaire (ou équation de Fokker-Planck)

$$\begin{aligned} \partial_t g(t) + v \cdot \nabla_x g(t) &= \kappa \frac{1}{M} Q_L(Mg(t), M) \\ (1.3.27) \quad &= \frac{2\pi\kappa}{M(v)} \nabla_v \cdot \left(M(v) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{P_{v-v_*}^\perp}{|v-v_*|} (\nabla_v g(t, v)) M(v_*) dv_* \right) \\ &=: \kappa K g(t). \end{aligned}$$

Vers l'équation de Boltzmann linéarisée

L'autre méthode pour linéariser l'équation de Boltzmann est de regarder les petites fluctuations de la mesure empirique autour de mesure d'équilibre. Présentons d'abord le cadre canonique. Soit $g^0 \in L^2(M(v)dz)$ une fonction de moyenne nulle

$$\int g^0(z) M(v) dz = 0$$

et $\lambda > 0$ un petit paramètre. On regarde la perturbation de l'équilibre au premier ordre :

$$(1.3.28) \quad F_N^0(Z_N) = \frac{e^{-\mathcal{H}_N(Z_N)}}{\mathcal{Z}_N} \left(1 + \delta \sum_{i=1}^N g^0(x_i, v_i) \right) =: \frac{e^{-\mathcal{H}_N(Z_N)}}{\mathcal{Z}_N} + \delta G_N^0(Z_N).$$

Notons que comme le domaine est un tore, la distribution F_N^0 est toujours normalisée :

$$\int F_N^0(Z_N) dZ_N = 1.$$

On ne s'intéresse qu'à l'évolution de $G_N(t, Z_N)$, le transport de $G_N^0(Z_N)$ par le flot des particules. En notant $(G_N^{(s)}(t))_{s \geq 0}$ les marginales de $G_N(t)$, celles-ci sont solutions de la hiérarchie BBGKY (1.3.7), et convergent donc vers $(G^s(t))$ solutions de la hiérarchie de Boltzmann (1.3.8) pour la donnée initiale

$$\forall s \geq 0, G_0^s(Z_s) := M^{\otimes s}(V_s) \sum_{i=1}^s g_0(z_s).$$

On vérifie alors que (G^s) doit être de la forme

$$\forall s \geq 0, G^s(t, Z_s) = M^{\otimes s}(V_s) \sum_{i=1}^s g(t, z_s),$$

avec $g(t)$ solution de l'équation de Boltzmann linéarisée

$$\begin{aligned} \partial_t g(t) + v \cdot \nabla_x g(t) &= \mathfrak{d}^{-1} \frac{1}{M} (Q(M, Mg) + Q(Mg, M)) \\ (1.3.29) \quad &= \mathfrak{d}^{-1} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}} (g(v') + g(v'_*) - g(v) - g(v_*)) M(v_*) b(v - v_*, \eta) dv_* d\eta \\ &=: \mathfrak{d}^{-1} \mathcal{L}_B g. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Lanford et la densité des fonctions Lipschitz dans $L^2(M(v)dz)$, on peut montrer que sur le temps de Lanford, $G_N^{(1)}(t)/M$ converge vers $g(t)$ au sens fort dans $L^2(M(v)dz)$ et l'équation de Boltzmann linéarisée est justifiée sur un temps court. Il faut maintenant trouver une méthode pour prouver la convergence sur des temps plus longs.

Remarque 1.3.1

On considère ici une perturbation de la solution stationnaire de taille $O(N)$. On rappelle que suivre une seule particule témoin revient à l'étude d'une perturbation d'ordre $O(1)$, et que la dérivation de l'équation complète amène à l'étude de perturbations d'ordre $O((1 + \delta)^N)$ avec $\delta > 0$ la taille de $(f_0 - M)/M$.

Donnons une autre méthode pour retrouver l'équation de Boltzmann linéarisée dans le cadre grand canonique. On rappelle la définition de la mesure empirique : pour une fonction test h ,

$$\pi_\varepsilon^t(h) := \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} h(z_i(t)).$$

Interprété comme une Loi des Grands Nombres, le théorème de Lanford 1.3.3 donne que la mesure empirique converge en loi vers la mesure gaussienne $M(v)dz$. Décrire plus précisément la statistique des sphères dures, on définit le champ de fluctuation ζ_ε^t comme

$$(1.3.30) \quad \zeta_\varepsilon^t(h) := \sqrt{\mu} (\pi_\varepsilon^t(h) - \mathbb{E}_\varepsilon [\pi_\varepsilon^t(h)])$$

où \mathbb{E}_ε est l'espérance par rapport à la mesure Gibbs grand canonique (à l'équilibre).

Une première étape pour comprendre ζ_ε^t est de calculer sa covariance : pour g et h deux fonctions tests, on veut montrer que comme dans le cadre canonique,

$$\mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^t(h)\zeta_\varepsilon^0(g)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int hg(t)Mdz$$

avec $\mathbf{g}(t)$ solution de l'équation de Boltzmann linéarisée avec $\mathbf{g}(t=0) = g$.

On peut lier les deux modèles de la manière suivante : pour h, g deux fonctions tests, avec $\int g(z)M(z)dz = 0$, alors $\mathbb{E}_\varepsilon[\pi_\varepsilon^0(g)] = 0$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^t(h)\zeta_\varepsilon^0(g)] &= \mathbb{E}_\varepsilon \left[\pi_\varepsilon^t(h) \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} g(z_i^n) \right] \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} n!} \int \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(z_i(t)) \left(e^{-\mathcal{H}_n(\mathbf{Z}_n)} \sum_{i=1}^n g(z_i) \right) d\mathbf{Z}_n \\ &= \mathbb{E}_\varepsilon^g [\pi_\varepsilon^t(h)] \end{aligned}$$

où $z_i^n(t)$ est la position de la particule i dans la dynamique de n sphères dures et \mathbb{E}_ε^g est l'intégrale sur l'espace des phases grand canonique \mathcal{D} par rapport à la mesure

$$(1.3.31) \quad d\mathbb{P}_\varepsilon^g(\mathbf{Z}_\mathcal{N}) := \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{\mu}{(2\pi)^{d/2}} \right)^n \mathbb{1}_{\mathbb{D}^n} e^{-\mathcal{H}_n(\mathbf{Z}_n)} \left(\sum_{i=1}^n g(z_i) \right) d\mathbf{Z}_n.$$

On retrouve une forme grand canonique de la perturbation de la mesure d'équilibre

Bodineau, Gallagher et Saint-Raymond ont donné une première preuve en temps long dans le cadre canonique en dimension 2 et pour les sphères dures (voir [BGSR17]), avec un temps de validité $T \sim (\log \log N)^{1/4-}$ (échelle de temps au delà de laquelle on ne contrôle

plus la solution). Un point crucial de la preuve est que la fonction de partition \mathcal{Z}_ε peut être bornée inférieurement par $\exp(-CN^2\varepsilon^d)$, ce qui donne une borne uniforme qu'en dimension 2. Il est ainsi possible de majorer la mesure de Gibbs par la mesure gaussienne dans le scaling de Boltzmann-Grad $N\varepsilon = \mathfrak{d}^{-1}$

$$\frac{1}{(2\pi)^N \mathcal{Z}_N} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \mathbb{1}_{|x_i - x_j| > \varepsilon} e^{-\frac{|v_N|^2}{2}} \leq \frac{e^{C/\mathfrak{d}^2}}{(2\pi)^N} e^{-\frac{|v_N|^2}{2}}.$$

La preuve de [BGRS17] ne peut pas être adaptée en dimension 3 et il fallut passer à une formulation grand canonique du problème. Ce cadre plus général fut traité par Bodineau, Gallagher, Saint-Raymond et Simonella (voir [BGRS21]). Notons que leur preuve n'est valable que dans le cas des sphères dures. L'un des projets menés au cours de cette thèse était la généralisation du résultat à d'autres potentiels d'interaction, dans le but d'effectuer une limite de collision rasante (voir le paragraphe 1.3, le chapitre 5 et [LB22b]).

Enfin notons qu'il est possible d'aller plus loin dans la compréhension des petites fluctuations et montrer un Théorème Central Limite pour ζ_ε^t (voir [Spo81, Spo83, BGRS20a] pour des résultats en temps court et [BGRS22] pour le temps long). À l'instant initial, il est possible de montrer que ζ_ε^0 converge en loi vers ζ^0 défini par

Definition 1.3.1

Soit ζ^0 le champ gaussien sur \mathbb{D} de covariance

$$(1.3.32) \quad \forall f, g \in L(M(v)dz), \quad \begin{cases} \mathbb{E} [\zeta^0(h)\zeta^0(g)] = \int h(z)g(z)M(v)dz, \\ \mathbb{E} [\zeta^0(g)] = 0. \end{cases}$$

Il est possible d'étendre ce résultat sur le processus évoluant en temps :

Théorème 1.3.5 (Bodineau, Gallagher, Saint-Raymond, Simonella, [BGRS22])

Pour le système des sphères dans le tore \mathbb{T}^d (d plus grand que 3) dans le scaling de Boltzmann-Grad $\mu\varepsilon^{d-1} = 1$, $(\zeta_\varepsilon)_{t \geq 0}$ converge pour tout temps vers ζ^t , la solution de

$$(1.3.33) \quad \begin{cases} d\zeta^t = \mathcal{L}_B \zeta^t dt + d\xi^t \\ \zeta^{t=0} = \zeta^0 \end{cases}$$

avec ξ^t est le champs Gaussien de moyenne nulle et de covariance

$$(1.3.34) \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T h(z_1) \xi^{\tau_1}(dz_1) d\tau_1 \int_0^T h(z_2) \xi^{\tau_2}(dz_2) d\tau_2 \right] \\ := \frac{1}{2} \int_0^T d\tau \int d\mu(z_1, z_2, \eta) M(v_1) M(v_2) \Delta h \Delta g$$

avec

$$d\mu(z_1, z_2, \eta) := \delta_{x_1=x_2} b((v_1 - v_2), \eta) dz_1 dz_2 d\eta, \\ \Delta h := h(v'_1) + h(v'_2) - h(v_1) - h(v_2),$$

et $b((v_1 - v_2), \eta)$ le noyau de collision des sphères dures.

La dynamique des sphères dures ayant de la mémoire (c'est un processus purement déterministe), elle ne préserve pas la structure Gaussienne initiale des petites fluctuations. Dans [BGRS22], le caractère Gaussien est montré en vérifiant asymptotiquement les lois de Wick pour la mesure limite .

Chapitre 2

Résumé des apports de la thèse

2.1 Dérivation de l'équation de Boltzmann dans un domaine à bord avec réflexion isotrope

Le premier projet sur lequel nous avons travaillé au cours de cette thèse est la généralisation du théorème de Lanford (théorème 1.3.2) au cas d'un domaine à bord.

La première difficulté est de choisir la condition de bord telle que le problème soit abordable. Au cours de sa thèse, Théophile Dolmaire avait traité le cas de particules avec une réflexion spéculaire au bord ([Dol19, Dol22]).

De notre côté la première idée était de s'attaquer au cas des réflexions Maxwellienne. Malheureusement deux problèmes sont apparus. Tout d'abord il n'est pas évident que la dynamique des sphères dures soit bien définie si on ajoute cette loi de réflexion. Il nous semble malgré tout que c'est une difficulté propre aux sphères dures, et que pour d'autre potentiel d'interaction, ce problème disparaîtrait.

La seconde difficulté pour les réflexions Maxwelliennes vient des estimations *a priori*. Dans le cas sans bord, si la donnée initiale vérifie

$$(2.1.1) \quad \left| f_N^{0,(s)}(t, Z_N) \right| \leq \exp \left(-\beta \frac{|V_s|^2}{2} - s\gamma \right),$$

pour certaine constante β et γ , on peut borner la s -ième marginale $f_N^{(s)}(t, Z_N)$ par

$$(2.1.2) \quad \left| f_N^{(s)}(t, Z_N) \right| \leq \exp \left(-\frac{\beta \frac{|V_s|^2}{2} + s\gamma}{T-t} \right)$$

avec T une constante à déterminer (voir [GSRT13] pour plus de détails). L'un des points essentiels de la preuve est que toutes les Gaussiennes sont des solutions stationnaires de l'équation de Liouville associée aux sphères dures

$$(2.1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t F_N(t, Z_N) + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{x_i} F_N(t, Z_N) = 0 \\ F_N(t, \dots, x_i, v_i, \dots, x_j, v_j, \dots) \\ \quad = F_N(t, \dots, x_i, v'_i, \dots, x_j, v'_j, \dots) \text{ si } Z_N \in \partial \mathcal{D}_{i,j}^N \\ F_N(t, \dots, x_i, v_i, \dots) \\ \quad = M(x_i, v_i) \int F_N(t, \dots, x_i, u, \dots) (u \cdot n(x))_+ du \text{ si } Z_N \in \partial \mathcal{D}_i^{N,-}. \end{array} \right.$$

où $F_N(t, Z_n)$ est la distribution des N particules, $\theta(x)$ est la température au point x , $n(x)$

est le vecteur normal extérieur,

$$(2.1.4) \quad M_w(x, v) := \frac{\exp\left(-\frac{|v|^2}{2\theta(x)}\right)}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}} \theta(x)^{\frac{d+1}{2}}}$$

et

$$(2.1.5) \quad \partial\mathcal{D}_i^{N,-} := \{Z_N \in \mathcal{D}^N, x_i \in \partial\Lambda, v_i \cdot n(x_i) < 0\}.$$

Or si on ajoute des réflexions Maxwellienne au bord, il n'y aurait plus qu'une seule solution stationnaire de l'équation de Liouville (c'est évident dans le cas où la température est uniforme au bord du domaine) et on ne peut plus appliquer la stratégie usuelle pour les estimations *a priori*. Une méthode pour contourner cette difficulté serait de construire une famille infinie de sur-solution de l'équation de Liouville vérifiant seulement des inégalité de bord sur les $\partial\mathcal{D}_i^{N,-}$. Nous ne savons malheureusement pas construire de telles fonctions.

Pour que ces estimations fonctionnent à nouveau, nous avons choisi la loi de réflexion isotrope (1.1.32) : on remplace la condition de bord sur les $\partial\mathcal{D}_i^{N,-}$ par

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} & F_N(t, \dots, x_i, v_i, \dots) \\ &= c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} F_N(t, \dots, x_i, |v_i|\omega, \dots) (\omega \cdot n(x))_+ d\omega \text{ si } Z_N \in \partial\mathcal{D}_i^{N,-}. \end{aligned}$$

La première étape a été de montrer que le processus des sphères dures avec réflexion était bien posé. Pour ce faire on construit un espace de probabilité (Ω, \mathbb{P}) comme

$$(2.1.7) \quad \Omega := \left\{ \bar{\omega} = (\omega_i)_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ i \neq 0}} \in \left(\mathbb{S}^{d-1} \right)^{\mathbb{Z}^*}, \omega_i \cdot \vec{e}_1 > 0 \right\}, \quad \mathbb{P}(d\bar{\omega}) := \prod_{i \neq 0} c_d (\omega_i \cdot \vec{e}_1)_+ d\omega_i$$

avec c_d une constante de normalisation (les ω_i sont une famille de loi indépendante et de même loi). Un $\bar{\omega}$ permettant de coder toutes les réflexions qu'aura une particule, ainsi que de garder en mémoire les réflexions passées. On dote $\mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$ de la mesure

$$dZ_N \times \mathbb{P}^{\otimes N} (d\bar{\omega}_1 \cdots d\bar{\omega}_N).$$

On peut alors définir une dynamique $(z_i^t(Z_N, (\bar{\omega}_j)_j), \bar{\omega}_i^t(Z_N, (\bar{\omega}_j)_j))_{i \leq N}$ presque partout sur $\mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$ telle que si on fixe le point de départ de la dynamique Z_N , le processus

$$(Z_N^t(Z_N, (\bar{\omega}_i)_{i \leq N}), \mathbb{P}^{\otimes N}(d\bar{\omega}_1 \cdots d\bar{\omega}_N))$$

a la même loi que le processus des sphères dures avec réflexion isotrope. De plus, par construction, la dynamique est bijective, mesurable et d'inverse mesurable sur $\mathcal{D}^N \times \Omega^N$.

La construction de la dynamique sur $\mathcal{D}^N \times \Omega^N$ est la principale originalité du travail. Elle permet de revenir dans un cadre proche du cas sans bord. En particulier elle permet une représentation explicite du semi-groupe $T_N^\varepsilon(t)$ associé au transport de N particules avec la condition de réflexion isotrope :

$$(2.1.8) \quad (T_N^\varepsilon(t) F_N^0)(Z_N) = \int_{\Omega^N} F_N^0(Z_N^{-t}(Z_N, (\bar{\omega}_i)_i)) \mathbb{P}^{\otimes N}(d\bar{\omega}_1 \cdots d\bar{\omega}_N).$$

La formule précédente est interprétée comme une représentation par les caractéristique qui ressemble à la formule des caractéristiques pour le semi-groupes des sphères dures dans un domaine sans bord.

On peut alors suivre la même stratégie que dans la preuve originale de Lanford. On commence par écrire la hiérarchie BBGKY (1.3.7) sous sa forme de Duhamel

$$\begin{aligned}
 f_N^{(s)}(t) &= T_s^\varepsilon(t) f_N^{0,(s)} + \int_0^t dt_1 T_s^\varepsilon(t-t_1) \sum_{\substack{1 \leq a \leq s \\ \sigma = \pm 1}} (N-s) \varepsilon^{d-1} \sigma C_{s,s+1}^{\varepsilon,a,\sigma} f_N^{s+1}(t_1) \\
 (2.1.9) \quad &= T_s^\varepsilon(t) f_N^{0,(s)} + \sum_{p=1}^{N-s} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_p) \\ \forall i, a_i \in [1, s+i-1] \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \{\pm 1\}^p}} \sigma_1 \cdots \sigma_p \frac{(N-s+i-1)! \varepsilon^{(d-1)i}}{(N-s-1)!} \int_0^t dt_1 \cdots \\
 &\quad \cdots \int_0^{t_{p-1}} dt_p T_s^\varepsilon(t-t_1) C_{s,s+1}^{\varepsilon,a_1,\sigma_1} \cdots C_{s+p-1,s+p}^{\varepsilon,a_p,\sigma_p} T_{s+p}^\varepsilon(t_p) f_N^{0,(s+p)}.
 \end{aligned}$$

avec la condition de réflexion isotrope au bord.

On interprète alors cette équation comme une équation aux caractéristiques : le semi groupe $T_s^\varepsilon(t)$ est vu comme un simple transport le long des trajectoires du flot, et les opérateurs de collisions $C_{s,s+1}^{\varepsilon,a,\sigma}$ comme l'ajout d'une particule à côté d'une des s particules du système. Fixons deux suites (a_1, \dots, a_p) , $a_i \in [1, s+p-1]$ et $(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \{\pm 1\}^p$. On définit la *pseudocaractéristique* $\xi_{s,p}^\varepsilon(t, \tau, Z_s)$ comme une trajectoire partant de Z_s au temps t et évoluant selon le flot des sphères dures rétrograde sur chaque intervalle (t_{i+1}, t_i) (avec $t_0 = t$ et $t_{p+1} = 0$) et à chaque temps t_i , on crée une nouvelle particule touchant la particule a_i . Pour coder la position de cette nouvelle particule, on a besoin de l'instant de la collision t_i , de la position relative entre la nouvelle particule et la particule rencontrée $\nu_i := \frac{x_{s+i}(t_i) - x_{a_i}(t_i)}{\varepsilon}$, de la vitesse post-collision de la particule i $\bar{v}_i := v_{s+i}(t_i^+)$, ainsi que d'un paramètre de collision $\bar{\omega}_{i+s}$ paramétrant les réflexions de la nouvelle particule. La famille $(t_i, \nu_i, \bar{v}_i, \bar{\omega}_{i+s})$ sont appelé les paramètres de la collision i .

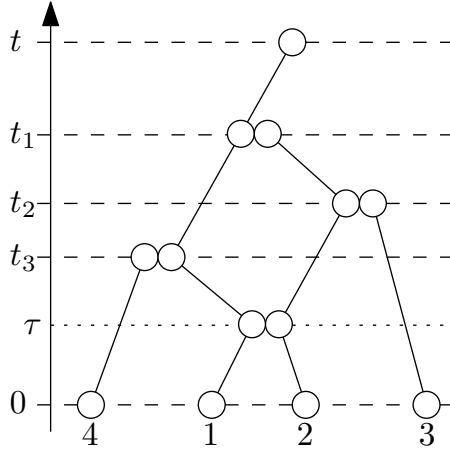


FIGURE 2.1 – Exemple de pseudocaractéristique associée aux paramètres $(a_i)_i = (1, 2, 1)$ et $(s_i)_i = (-1, 1, 1)$. La première collision entre les particules 1 et 2 (au temps) n'est pas une création de particule et est qualifiée de *recollision*.

On peut réécrire la formule (2.1.9) comme

$$\begin{aligned}
 (2.1.10) \quad f_N^{(s)}(t, Z_s) &= \sum_{p=0}^{N-s} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_p) \\ \forall i, a_i \in [1, s+i-1] \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \{\pm 1\}^p}} \sigma_1 \cdots \sigma_p C(N, s, \varepsilon) \int f_N^{0,(s+p)}(\xi_{s,p}^\varepsilon(t, 0, Z_s)) \\
 &\quad \times d\Lambda_{(a_i, s_i)_{i \leq p}}^\varepsilon((t_i, \nu_i, \bar{v}_i, \bar{\omega}_{s+i})_{i \leq p}) \mathbb{P}^{\otimes s}(d\bar{\omega}_1 \cdots d\bar{\omega}_s)
 \end{aligned}$$

avec

$$C(N, s, \varepsilon) = \frac{(N - s + i - 1)! \varepsilon^{(d-1)i}}{(N - s - 1)!},$$

$$d\Lambda_{(a_i, s_i)_{i \leq p}}^\varepsilon := \prod_{i=1}^p \left[s_i \nu_i \cdot (\bar{v}_i - v_{a(i)}^\varepsilon(t_i^+)) \right]_+ dt_i d\bar{v}_i d\nu_i \mathbb{P}(d\bar{\omega}_{s+i}).$$

Il est possible d'écrire la même décomposition pour la solution de la hiérarchie de Boltzmann

(2.1.11)

$$f^s(t, Z_s) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_p) \\ \forall i, a_i \in [1, s+i-1] \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \{\pm 1\}^p}} \sigma_1 \cdots \sigma_p \int f_0^{s+p}(\xi_{s,p}^0(t, 0, Z_s)) \times d\Lambda_{(a_i, s_i)_{i \leq p}}^0((t_i, \nu_i, \bar{v}_i, \bar{\omega}_{s+i})_{i \leq p}) \mathbb{P}^{\otimes s}(d\bar{\omega}_1 \cdots d\bar{\omega}_s)$$

où dans la pseudocharactéristique $\xi_{s,p}^0$ les particules suivent le flot libre (sans collision autre que les créations de particules). La preuve se résume à montrer une convergence terme à terme (les estimations *a priori* (2.1.2) permettent de couper la somme). Comme f_0^{s+p} est supposée continue, il suffit d'estimer $|\xi_{s,p}^0(t, 0, Z_s) - \xi_{s,p}^\varepsilon(t, 0, Z_s)|$.

Il y a deux raisons pour lesquelles les pseudotrajectoires pour les sphères dures peuvent être très différentes des pseudotrajectoires pour des particules ponctuelles (définies pour les même paramètres) dans le cas d'un domaine à bord. Premièrement la trajectoire $\xi_{s,p}^\varepsilon(t, 0, Z_s)$ peut avoir une collision entre deux particules à l'intérieur d'un intervalle (t_{i+1}, t_i) (ce qui ne peut pas arriver pour $\xi_{s,p}^0(t, 0, Z_s)$). On dit alors que l'on a une *re-collision*, et c'est un problème apparaissant déjà dans la preuve originale.

La deuxième raison est spécifique au domaine à bord avec une loi de réflexion aléatoire. A cause du décalage entre $\xi_{s,p}^\varepsilon(t, \tau, Z_s)$ et $\xi_{s,p}^\varepsilon(t, \tau, Z_s)$, leurs réflexions n'arrivent pas au même moment, mais on peut les faire correspondre l'une à l'autre (car les deux trajectoires sont proches). Si en raison du décalage, une réflexion dans $\xi_{s,p}^\varepsilon$ se passe après $\tau = 0$ et que la réflexion correspondante dans $\xi_{s,p}^0$ se passe avant $\tau = 0$, alors les vitesses de $\xi_{s,p}^\varepsilon(t, 0, Z_s)$ et $\xi_{s,p}^0(t, 0, Z_s)$ vont être très différentes.

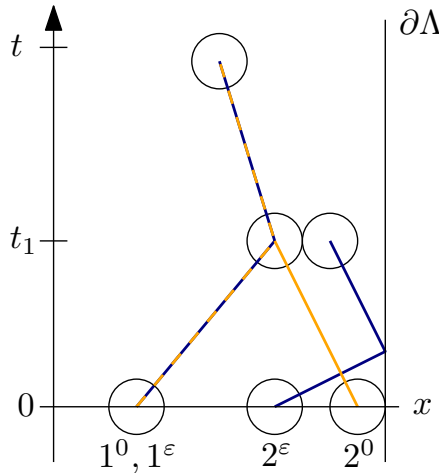


FIGURE 2.2 – À cause de la réflexion, les vitesses de la particule 2 dans $\xi_{1,1}^\varepsilon$ et dans $\xi_{1,1}^0$ sont très différentes l'une de l'autre.

Estimer les paramètres impliquant ce deuxième type de trajectoires pathologiques se fait au prix d'une erreur très importante (de l'ordre de $\varepsilon^\alpha |\log \varepsilon|^p$, p le nombre de particules

ajoutées), ce qui donne une vitesse de convergence bien moins bonne que dans le cas d'un domaine sans bord.

Notons que dans le cas du demi-espace $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, avec réflexion spéculaire, T. Dolmaire (voir [Dob79]) put contourner ce problème en considérant le revêtement

$$(2.1.12) \quad p : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (|x_1|, x_2, x_3), \end{cases}$$

ce qui permet de transformer le transport libre avec réflexion sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, discontinu, en le transport libre sur \mathbb{R}^3 , continu, et ainsi éviter la notion de réflexion.

2.2 Limite de collisions rasantes : de l'équation de Boltzmann linéarisée à l'équation de Landau

Le second projet abordé fut la dérivation d'une équation de Landau linéarisée à partir d'un gaz de particules. Jusqu'à la fin de ce chapitre, on considéra, le domaine $\Lambda := \mathbb{T}^3$. Comme expliqué dans la section 1.3.3, aborder directement le scaling de couplage faible $\alpha = \varepsilon^{1/2}$, $N\varepsilon^3 = 1$ est très difficile et on se restreindra au scaling des collisions rasantes $N\varepsilon^2 = \alpha^2$, $\alpha \simeq \log |\log \varepsilon|^{-1}$ (on verra que dans certains cas ce n'est pas le bon scaling du système).

Notons que le cas linéaire a déjà été traité par Nicolò Catapano dans sa thèse [Cat18].

Le scaling des collisions rasantes peut être découpé en deux limites d'échelle : premièrement la limite de Boltzmann-Grad $N\varepsilon^2 = \alpha^2$, $N \rightarrow \infty$ et α constant, puis la limite $\alpha \rightarrow 0$ (que l'on appelle aussi limite de collision rasante). Le projet peut être séparé en deux étapes. Dans un premier temps il faut établir la validité de l'équation de Boltzmann linéarisée pour une classe assez large de potentiels en suivant la preuve de Bodineau, Gallagher, Saint-Raymond et Simonella (voir [BGSRS21]). Cela a en partie été traité au cours de la thèse (voir le paragraphe 2.3 et le chapitre 5). Dans un deuxième temps il faut traiter le passage de l'équation de Boltzmann linéarisée à l'équation de Landau linéarisée.

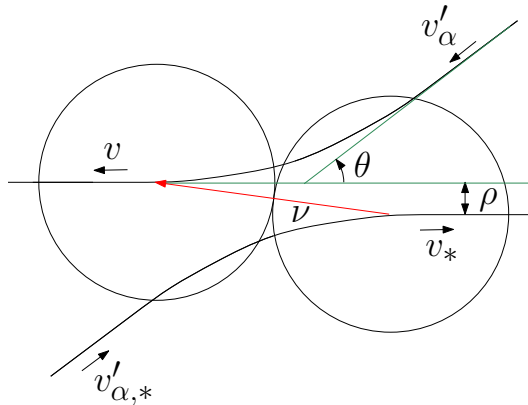


FIGURE 2.3 – La collision entre deux particules dans le cas $v + v_* = 0$.

Rappelons la définition de l'opérateur de Boltzmann linéarisé associé au potentiel $\alpha\mathcal{V}$

$$(2.2.1) \quad \mathcal{L}_\alpha g(v) := \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3} (g(v'_\alpha) + g(v'_{\alpha,*}) - g(v) - g(v_*)) M(v_*) ((v - v_*) \cdot \nu)_+ dv dv_*$$

avec $(v'_\alpha, v'_{\alpha,*})$ les vitesses post-collisionnelles définie au paragraphe 1.1.1 (pour le potentiel $\alpha\mathcal{V}$) et l'opérateur de Landau linéarisé

$$(2.2.2) \quad \mathcal{K}g(v) := \frac{2\pi}{M(v)} \nabla_v \cdot \left(\int \frac{P_{v-v_*}^\perp}{|v-v_*|} (\nabla g(v) - \nabla g(v_*)) M(v) M(v_*) dv_* \right).$$

Les opérateurs \mathcal{L}_α et \mathcal{K} sont autoadjoints et négatifs sur $L^2(M(v))$.

Dans notre étude, nous nous étions restreints au cas de potentiels de la forme suivante :

Hypothèse 2.2.1

Le potentiel \mathcal{V} est supposé à support compact sur la boule unité et à symétrie sphérique. De plus on suppose qu'on peut le mettre sous la forme

$$(2.2.3) \quad \mathcal{V}(r) = \frac{f(r)}{r^s}$$

avec f une fonction à support dans $[0, 1]$, continue sur \mathbb{R}^+ et lisse dans $[0, 1]$ (mais on admet le cas où $f'(1) < 0$), $f(1) = 1$ et s est une constante positive. Pour des raisons techniques on demande en plus que pour tout $\rho \in (0, 1]$

$$(2.2.4) \quad \sup_{\rho \leq r \leq 1} \{|\mathcal{V}(r)|, |r\mathcal{V}'(r)|, |r^2\mathcal{V}''(r)|\} \leq \frac{C}{\rho^s}$$

pour une certaine constante C .

Dans ce cadre nous sommes, avec Raphael Winter, parvenus à montrer le théorème suivant.

Théorème 2.2.2

Soit \mathcal{V} un potentiel d'interaction satisfaisant les hypothèses 2.2.1 pour $s \in [0, 1]$. On définit le libre parcours moyen \mathfrak{d}_α comme

$$(2.2.5) \quad \mathfrak{d}_\alpha = \begin{cases} \alpha^2 & \text{si } s \in [0, 1), \\ \alpha^2 |\log \alpha| & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}^3)$

$$(2.2.6) \quad \|\mathfrak{d}_\alpha^{-1} \mathcal{L}_\alpha \psi - c_\mathcal{V} \mathcal{K} \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C |\log(\alpha)|^{-1} \|\psi\|_{\mathcal{C}_b^3(\mathbb{R}^3)},$$

avec \mathcal{K} l'opérateur de Landau linéarisée et $c_\mathcal{V} > 0$ calculable explicitement

$$(2.2.7) \quad c_\mathcal{V} = \begin{cases} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\rho}{u} \mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right)^2 \rho d\rho & \text{if } s \in [0, 1), \\ 1 & \text{if } s = 1. \end{cases}$$

Notons que la constante $c_\mathcal{V}$ vérifie aussi l'égalité

$$(2.2.8) \quad 2\pi c_\mathcal{V} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(k \cdot e_1) |k|^2 |\hat{\mathcal{V}}(k)|^2 dk,$$

avec la convention $\hat{\mathcal{V}}(k) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \cdot x} \mathcal{V}(x) dx$ la transformée de Fourier de \mathcal{V} . C'est la valeur usuelle de la constante de diffusion que l'on retrouve dans la littérature (voir [PS21] pour un calcul formel).

La preuve s'appuie sur une estimation de l'angle θ entre $v - v_*$ et $v'_* - v'$ trouvée par Desvillettes et Ricci dans [DR01]. En notant $\rho = \cos((v - v_*), \nu)$ (voir la figure 2.3), on a pour $\frac{\alpha}{\rho^s} \leq C|v - v_*|^2$

$$(2.2.9) \quad \left| \theta + \frac{4\alpha}{|v - v_*|^2} \int_0^1 \frac{\rho}{u} \mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right| \leq C \frac{\alpha^2}{\rho^{2s}|v - v_*|^4}.$$

Cette estimation est valable pour les collisions rasantes, *i.e.* quand l'énergie cinétique relative (de l'ordre de $|v - v_*|^2$) est plus grande que l'énergie potentielle (de l'ordre de α/ρ^s). On découpe \mathcal{L}_α en deux morceaux

(2.2.10)

$$\mathcal{L}_\alpha^1 g(v) := \int_{\left\{ \frac{\alpha}{\rho^s} \leq C|v - v_*|^2 \right\}} (g(v'_\alpha) + g(v'_{\alpha,*}) - g(v) - g(v_*)) M(v_*) ((v - v_*) \cdot \nu)_+ d\nu dv_*,$$

$$\mathcal{L}_\alpha^2 g(v) := \mathcal{L}_\alpha g(v) - \mathcal{L}_\alpha^1 g(v).$$

On utilise l'estimation sur θ pour contrôler \mathcal{L}_α^1 et il suffit de montrer que $\mathcal{L}_\alpha^2 g(v)$ est négligeable devant $\mathcal{L}_\alpha^1 g(v)$ quand $\alpha \rightarrow 0$.

Dans le cas où $s > 1$, c'est $\mathcal{L}_\alpha^1 g(v)$ qui devient négligeable devant $\mathcal{L}_\alpha^2 g(v)$. Ainsi ce ne sont plus les collisions rasantes qui dominent mais les collisions où les particules passent très proches l'une de l'autre. Le potentiel d'interaction ressemble alors à sa singularité et c'est l'opérateur de Boltzmann associé à la loi de puissance $\tilde{\mathcal{V}}(r) := 1/r^s$ qui est la bonne description asymptotique de \mathcal{L}_α :

Théorème 2.2.3

Soit \mathcal{V} un potentiel d'interaction satisfaisant les hypothèses (2.2.1) pour $s > 1$. Alors pour $\psi \in C_B^3(\mathbb{R}^3)$ on a

$$(2.2.11) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha^s} \mathcal{L}_\alpha \psi = \mathcal{L}_\infty \psi,$$

où \mathcal{L}_∞ est l'opérateur de Boltzmann linéarisé sans cut-off

$$(2.2.12) \quad \mathcal{L}_\infty g(v) = \int (g\left(\frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\eta\right) + g\left(\frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2}\eta\right) - g(v) - g(v_*)) M(v_*) \tilde{B}_s(v - v_*, \eta) dv_* d\eta,$$

avec $\tilde{B}_s(v_1 - v_2, \eta)$ le noyau de collision du potentiel homogène

$$(2.2.13) \quad \tilde{\mathcal{V}}_s(r) = \frac{1}{r^s}.$$

Les deux théorèmes ont été démontrés dans [LBW22] (voir le chapitre 4). Dans cette étude nous nous sommes contentés du cas de potentiels à support compact mais on peut généraliser au cas de potentiels à portée infinie avec une décroissance suffisamment rapide à l'infini :

$$\mathcal{V}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{r^{s'}}\right) \text{ avec } s' > 1.$$

En utilisant le théorème précédent et la dérivation l'équation de Boltzmann linéarisée avec cut-off, on peut espérer montrer la validité de l'équation de Boltzmann sans cut-off linéarisée à partir d'un . Ce type résultat est semblable à celui de Desvillettes et Pulvirenti [DP99] dans le cadre d'un gaz de Lorentz. Dans [Ayi17], Nathalie Ayi dérivait directement

l'équation de Boltzmann linéaire sans cut-off à partir des particules. Elle du cependant se restreindre à des potentiels avec une décroissance très forte à l'infinie (de l'ordre de $\exp(-\exp \exp r^4)$ quand $r \rightarrow \infty$). On peut mettre en parallèle cette condition de décroissance et le régime des collisions rasantes étudié par Catapano, dans le quelle l'intensité d'interaction doit décroître très lentement : $\alpha \sim \log |\log \varepsilon|$.

2.3 Validité en temps long de l'équation de Boltzmann linéarisée

La seconde étape de la dérivation d'une équation de Landau linéarisée est de montrer la validité de l'équation de Boltzmann linéarisée sur un temps long pour des potentiels vérifiant (2.2.4). Le problème a déjà été traité dans [BGSRS21] et nous rappelons ici le cadre.

Considérons un gaz de particules en interaction *via* un potentiel \mathcal{V} sur le tore de dimension d , avec pour Hamiltonien

$$\mathcal{H}_N(Z_N) := \frac{1}{2}|V_N|^2 + \alpha \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mathcal{V} \left(\frac{|x_i - x_j|}{\varepsilon} \right).$$

Le système est placé dans l'ensemble grand canonique $\mathcal{D} := \bigsqcup_{n \geq 0} \mathbb{D}^n$ et à l'équilibre :

$$d\mathbb{P}_\varepsilon(\mathbf{Z}_N) := \frac{1}{Z_\varepsilon} \sum_{n \geq 0} \frac{\mu^n}{(2\pi)^{\frac{dn}{2}} n!} \mathbb{1}_{\mathbb{D}^n} e^{-\mathcal{H}_n(\mathbf{Z}_n)} d\mathbf{Z}_n.$$

On notera dans la suite $\mathbf{Z}_{i_n}(t)$ les positions des particules $i_n := (i_1, \dots, i_n)$ dans la dynamique des sphères dures, et Z_n des coordonnées dans \mathbb{D}^n . On définit la mesure empirique π_ε^t pour toute fonction test $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{D})$ comme

$$\pi_\varepsilon^t(g) := \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{z}_i(t))$$

où $\mathbf{z}_i(t)$ est la position de la particule i à l'instant t , et ses fluctuations comme

$$\zeta_\varepsilon^t(g) := \sqrt{\mu} (\pi_\varepsilon^t(g) - \mathbb{E}_\varepsilon [\pi_\varepsilon^t(g)]).$$

On définit la norme

$$\|g\| := \sup_{(x,v) \in \mathbb{D}} M^{-1}(v) [|g(x,v)| + |\nabla_x g(x,v)|].$$

L'objectif est de montrer une estimation de covariance $\mathbb{E}_\varepsilon[\zeta_\varepsilon^t(h)\zeta_\varepsilon^0(g)]$ de la forme suivante

Conjecture 2.3.1

Plaçons nous dans le scaling de Boltzmann-Grad $\mu\varepsilon^{d-1}\mathfrak{d} = 1$. Il existe deux constante $C > 1$, $\mathfrak{a} \in (0,1)$ ne dépendant que de \mathcal{V} et une suite $(C_\alpha)_\alpha$ telles que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $T > 1$, $\theta < \frac{\mathfrak{d}^2}{CT^2}$ et g, h deux fonctions tests $\mathcal{C}^1(\mathbb{D})$ vérifiant $\|g\|, \|h\| < \infty$.

$$(2.3.1) \quad \sup_{t \in [0, T]} \left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\zeta_\varepsilon^t(h) \zeta_\varepsilon^0(g) \right] - \int h(z) \mathbf{g}_\alpha(t, z) M(v) dz \right| \leq \left(C \frac{T^{3/2} \theta^{1/2}}{\mathfrak{d}^2} + C_\alpha \left(\frac{CT}{\mathfrak{d}} \right)^{2T/\theta} \varepsilon^\mathfrak{a} \right) \|h\| \|g\|.$$

où $\mathbf{g}_\alpha(t, z)$ est solution de l'équation de Boltzmann linéarisée

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{g}_\alpha(t) + v \cdot \nabla_x \mathbf{g}_\alpha(t) &= \mathfrak{d}^{-1} \mathcal{L}_\alpha \mathbf{g}_\alpha(t) \\ \mathbf{g}_\alpha(t=0) &= g \end{aligned}$$

avec \mathcal{L}_α l'opérateur de Boltzmann associé à $\alpha\mathcal{V}$.

Dans la conjecture, la suite C_α dépend du comportement du noyau de collision associé au potentiel $\alpha\mathcal{V}$ quand α tend vers 0. Pour une bonne classe de potentiels (voir l'hypothèse 2.3.1), nous pensons qu'il est possible de prendre C_α proportionnelle à une certaine puissance de α .

Dans la borne précédente, on peut choisir pour α et \mathfrak{d} fixées $T_\varepsilon = o((\log |\log \varepsilon|)^{1/3})$ et $\theta = \frac{1}{c \log |\log \varepsilon|}$ pour $c \in (0, 1)$ suffisamment petit, ce qui montre la validité de l'équation sur des intervalles de temps arbitraires. De plus, en liant α et \mathfrak{d} comme au paragraphe précédent, on voit que pour $\alpha \rightarrow 0$, avec ε négligeable devant α on retrouvera en combinant avec le théorème 2.2.2 une équation de Landau linéarisée. La définition de $\alpha(\varepsilon)$ dépendra des constantes C_α que l'on réussira à obtenir, mais il faudra typiquement choisir $\alpha \simeq \log |\log \varepsilon|^{-\kappa}$ avec $\kappa > 0$.

Le théorème a été prouvé dans [BGSRS21] dans le cas des sphères dures. Cependant leur preuve utilise un résultat de théorie des billards qui ne semble pas pouvoir se généraliser dans le cas d'autres potentiels d'interaction. Il a donc fallu trouver une manière de contourner l'utilisation de ce résultat. Pour l'instant les modifications n'ont été faites que dans le cas des sphères dures (voir [LB22b] et le chapitre 5).

Schéma de la preuve de [BGSRS21]

Nous allons donner les grandes lignes de [BGSRS21] pour expliquer ce qui doit être modifié pour les potentiels autres que les sphères dures.

Comme ζ_ε^t est une variable aléatoire centrée, on a

$$(2.3.3) \quad \mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^t(h) \zeta_\varepsilon^0(g)] = \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} h(\mathbf{z}_i(t)) \zeta_\varepsilon^0(g) \right].$$

La première étape est de construire une famille de fonctionnelles $\Phi_{\varepsilon, n}^t : L^\infty(\mathbb{D}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{D}^n)$ permettant de tirer en arrière les fonctions h évaluées au temps t au temps 0.

$$(2.3.4) \quad \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} h(\mathbf{z}_i(t)) \zeta_\varepsilon^0(g) \right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu^{-\frac{1}{2}} \sum_{\underline{i}_n} \Phi_{\varepsilon, n}^t[h](\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}(0)) \zeta_\varepsilon^0(g) \right].$$

où $\sum_{\underline{i}_n}$ est la somme sur le n -uplet $\underline{i}_n := (i_1, \dots, i_n)$ vérifiant $i_k \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$ et $\forall k \neq l, i_k \neq i_l$. Les $\Phi_{\varepsilon, n}^t$ sont des versions duales du développement en pseudocaractéristiques que l'on a déjà présentées au paragraphe 2.1 : pour $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $G_{n+1} : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions tests,

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} & \int h(z_1) \left(\sum_{(a_i, s_i)_{i \leq n}} \sigma_1 \cdots \sigma_n G_{n+1}(\xi_{1, n}^0(t, 0, z_1)) d\Lambda_{(a_i, s_i)_{i \leq n}}^0 \right) dz_1 \\ & =: \int \Phi_{\varepsilon, n+1}^t[h](Z_{n+1}) G_{n+1}(Z_{n+1}) dZ_{n+1}. \end{aligned}$$

On peut définir les $\Phi_{\varepsilon, n}^t$ comme une somme sur les *histoires*. Pour simplifier, une histoire est une manière de retirer (ou non) une particule à chaque collision de telle manière qu'à l'instant t il ne reste plus qu'une seule particule (dans ce paragraphe on regarde les trajectoires

dans le sens direct en temps). On peut écrire

$$(2.3.6) \quad \Phi_{\varepsilon,n}^t[h](Z_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\text{histoire}} h(z_k(t)) \mathbb{1}_{\text{histoire}} \sigma_{\text{histoire}}$$

où $\sigma_{\text{histoire}} = \pm 1$ et $z_k(t)$ est la position de la dernière particule existante k (qui dépend de l'histoire). La signature σ_{histoire} correspond au $\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$ dans la formule des pseudo-trajectoires (2.1.11). On parle de développement sur les trajectoires (on remonte chaque trajectoire jusqu'à sa position initiale).

La preuve se fait en montrant que chaque terme de la somme (2.3.4) converge vers sa limite formelle. Comme dans la dérivation de l'équation de Boltzmann (abordée au paragraphe 2.1), on doit contrôler le nombre de collision du système et séparer les trajectoires principales des trajectoires pathologiques. Le traitement de la partie principale est similaire à celui fait dans la dérivation de l'équation de Boltzmann complète (décrit dans la partie 2.1 et au chapitre 3).

Il reste à borner la partie correspondant aux trajectoires pathologiques. Dans la dérivation usuelle de l'équation de Boltzmann, on borne cette partie dans une norme L^∞ à poids (voir par exemple [Lan75, Kin75, GSRT13, BGSR16, PSS14] et le paragraphe 2.1). Dans notre cas les auteurs de [BGSRS21] introduisent un temps d'arrêt t_s pour arrêter le développement juste après qu'une trajectoire devienne pathologique, et ainsi ne traiter qu'un seul problème par trajectoire. Pour appliquer cette stratégie, il est pratique d'utiliser des estimations L^2 . En effet en notant pour $H_n : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(2.3.7) \quad \widehat{H}_n := \left(\frac{1}{\mu^n} \sum_{i_n} H_n(\mathbf{Z}_{i_n}) - \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\mu^n} \sum_{i_n} H_n(\mathbf{Z}_{i_n}) \right] \right)$$

on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\sum_{i_n} \Phi_{\varepsilon,n}^{t-t_s}[h](\mathbf{Z}_{i_n}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \right] \right| &\leq \mathbb{E}_\varepsilon \left[\left(\mu^n \widehat{\Phi_{\varepsilon,n}^{t-t_s}[h]}(\mathbf{Z}_{i_n}(t_s)) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^0(g)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\equiv \mathbb{E}_\varepsilon \left[\left(\mu^n \widehat{\Phi_{\varepsilon,n}^{t-t_s}[h]}(\mathbf{Z}_{i_n}(0)) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^0(g)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

en utilisant l'invariance de la mesure de Gibbs par le flot. On peut donc complètement ignorer ce qui se passe avant t_s .

Il faut maintenant borner les $\Phi_{\varepsilon,n}^t[h]$. Malheureusement on ne sait pas tirer partie des éventuelles annulations dues au signe σ_{histoire} . On se retrouve donc à devoir compter le nombre d'histoires et de collisions possibles. On distingue deux types de collisions : lors des premières on retire une particule (on parle d'*annihilation*) et dans les secondes les deux particules survivent (on parle de *recollision*). Ces dernières sont plus dures à contrôler.

On a donc besoin de deux échelles de temps pour contrôler les deux types de collisions séparément. La première est relativement large $\theta = 1/\beta \log |\log \varepsilon|$ (avec $\beta \in (0, 1)$ que l'on fixera plus tard). On arrête le développement au premier temps (en partant d'instant final) $t_s = t - k\theta$ tel qu'il y a plus de 2^k annihilations sur $[t_s, t_s + \theta]$. Ainsi le nombre d'annihilations croît au plus exponentiellement.

La seconde échelle de temps, de pas plus court $\delta = \varepsilon^{\beta'}$ (avec $\beta' \in (0, 1)$ fixer plus tard), sert à contrôler le nombre de recollisions possibles. On s'arrête au premier temps $t_s = t - k\delta$ tel qu'il y a une recollision sur $[t_s, t_s + \delta]$.

Fixons γ un entier (sa valeur sera définie plus tard). Pour borner le nombre de recollisions sur $[t_s, t_s + \delta]$, on conditionne la donnée initiale \mathbf{Z}_N pour que pour sur chaque

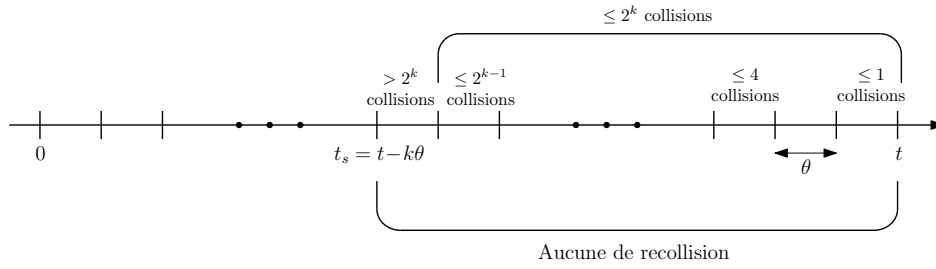


FIGURE 2.4 – Première filtration sur un grand pas de temps θ pour contrôler le nombre d’annihilation.

$[k\delta, (k + 1)\delta]$ au plus γ particules puissent interagir ensemble. Burago, Ferleger et Kononenko (voir [BFK98]) ont donné une borne sur le nombre possible entre γ particules par une constante ne dépendant que de γ . Cela permet de borner le nombre de collision sur $[t_s, t_s + \delta]$ et donc de conclure. Malheureusement n tel théorème semble difficile à généraliser pour d’autres potentiels et il faut lui trouver une alternative.

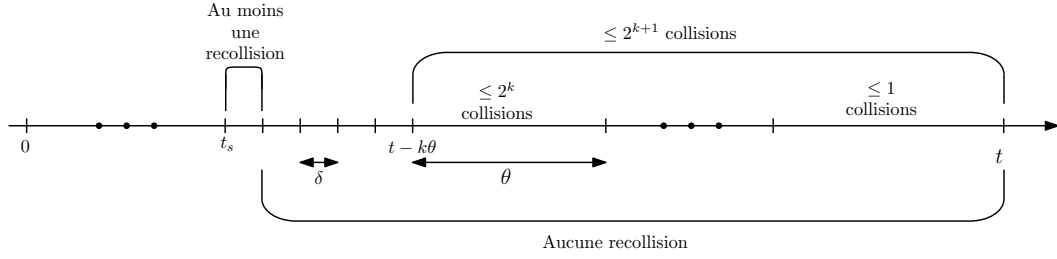


FIGURE 2.5 – Deuxième filtration sur un petit pas de temps δ pour contrôler les recollisions.

Preuve sans utiliser de théorème de théorie des billards

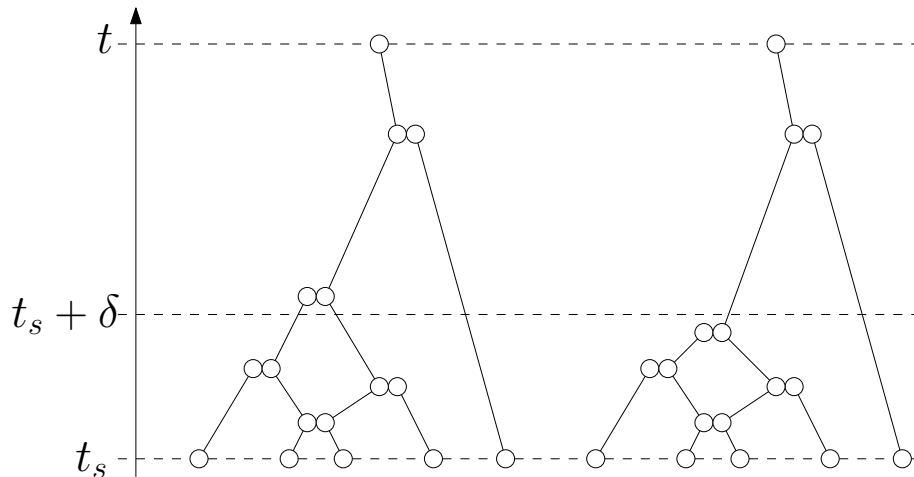


FIGURE 2.6 – Un exemple de trajectoires non-pathologique (à gauche) et pathologique (à droite). Dans [BGRS21] les auteurs ne font pas de distinction entre ces deux trajectoires.

Fixons (i_1, \dots, i_n) une famille de particules avec $(z_{i_1}, \dots, z_{i_n})$ leur position au temps τ , et un histoire. On définit le graphe de collision sur un intervalle de temps $[\tau, \tau']$ comme le graphe dont les sommets sont les particules et avec une arête associée chaque collision ayant lieu sur $[\tau, \tau']$ dans la trajectoire associé à l’histoire prescrite.

Une trajectoire est *non-pathologique* si

- son graphe de collision sur $[t_s + \delta, t]$ est un arbre (il n'y a pas de recollision après $t_s + \delta$),
- sur $[t_s, t_s + \delta]$ son arbre de collision n'a pas de cycle (mais on autorise des recollisions).

Il est possible de borner le nombre de recollision pour les trajectoires non-pathologique.

On part à l'instant initial avec n particules. Comme le graphe de collision sur $[t_s, t_s + \delta]$ de la trajectoire est simple, il a au plus $n - 1$ arêtes (soit $n - 1$ collisions). Comme les recollisions de la trajectoire n'apparaissent qu'entre t_s et $t_s + \delta$, il ne peut y avoir plus de $n - 1$ recollision.

Nous devons maintenant interdire les données initiales pour les quelles il existe une trajectoire pathologique. Il n'est pas nécessaire de regarder toutes les particules. On introduit la notion de *sous-configuration pathologique* : $Z_r \in \mathbb{D}^r$ est dans une sous-configuration pathologique s'il existe une histoire pour laquelle le graphe de collision sur $[t_s, t_s + \delta]$ est connexe et un cycle. Ainsi si Z_n n'a pas de sous-configuration pathologique, les trajectoires partant de Z_n seront non-pathologique.

Une difficulté est que l'on ne peut pas prendre comme conditionnement « toutes les familles de particules de $\mathcal{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)$ ne sont pas des sous-configurations pathologiques », le complémentaire étant trop grand : comme il y a approximativement μ particules, choisir k particules a un coût de μ^k , alors qu'imposé qu'elle soit une sous-configuration pathologique donne un gain de $C(C\mu^{-1})^{k-1}\varepsilon^a$ où a est une constante entre 0 et 1. En effet on a besoin de $k - 1$ collisions pour rendre le graphe connexe, chacune donnant un gain de μ^{-1} . La première collision créant un cycle donne un gain supplémentaire plus faible, d'ordre ε^a . Le gain total est donc

$$\mu^k C(C\mu^{-1})^{k-1} \varepsilon^a = C^k \mu \varepsilon^a$$

qui diverge quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (on rappelle que dans le scaling de Boltzmann-Grad, $\mu = \varepsilon^1 - d$).

On est obligé de prendre un conditionnement asymétrique, demandant seulement que certaines familles de particules ne soient pas des sous-configurations pathologiques. Dans la somme $\sum_{\underline{i}_n} \Phi_{\varepsilon, n}^{t-t_s}[h](\mathcal{Z}_{\underline{i}_n})$, n particules sont déjà choisies, et pour chaque terme de la somme on ne s'intéresse qu'aux particules en arrière plan qui peuvent influencer i_1, \dots, i_n . Il est donc suffisant d'imposer le conditionnement « toutes les familles de $\mathcal{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)$ dont une des particules est dans \underline{i}_n ne sont pas pathologiques ». Cela permet d'obtenir un gain d'un facteur $n\mu^{-1}$ (on choisit une particule parmi les n éléments de \underline{i}_n au lieu de la choisir parmi toutes les μ particules), ce qui est suffisant pour contrôler le terme de reste.

Vers l'adaptation au cas d'autre potentiel d'interaction

Nous espérons que la stratégie développée pour les sphères dures pourra être adaptée à certains potentiels d'interaction pour montrer la conjecture 2.3.1. Cela permettrait de compléter le programme de dérivation de Landau linéarisée. Néanmoins, il reste certaines difficultés techniques dont nous donnons un aperçu dans ce dernier paragraphe.

Le premier point à traiter est la réécriture des développements sur les trajectoires $\Phi_{\varepsilon, n}^t$ pour le flot des particules. En effet ces dernières peuvent se chevaucher et la notion de collision n'est plus adaptée. L'idée (en suivant la preuve de King [Kin75]) est de remplacer les temps collision par les instants où deux particules sont à distance exactement ε . À chaque fois, on décide si on retire une particule, l'autre ou aucune.

La seconde difficulté est la possibilité de collision multiple (impliquant au moins trois particules). Celles-ci ont déjà été traitées par King mais dans une présentation rétrograde des trajectoires (les pseudocaractéristiques), alors que nous utilisons dans ce travail une construction des pseudotrajectoires dans le sens temporel direct. Ce type de collision ressemble beaucoup aux recollisions, imposant des contraintes très fortes sur la trajectoire.

On peut les inclure dans le conditionnement asymétrique. Cela permet de se ramener au trajectoire n'admettant que des collisions binaires, et donc à un cadre proche de celui des sphères dures.

La dernière étape que nous avons repérée est le traitement des recollisions. La solution plus simple est de choisir un potentiel qui permette de se ramener aux estimations pour les sphères dures. Pour cela il suffit de majorer les noyaux de collision b_α associés à $\alpha\mathcal{V}$ par le noyau de collision des sphères dures pour $|v - v_*| \leq C|\log \varepsilon|$ par une formule de la forme

$$b_\alpha(v - v_*, \eta) \leq C \left(\frac{|\log \varepsilon|}{\alpha} \right)^\kappa |v - v_*|,$$

avec $\kappa \geq 1$ une constante à déterminer.

Cette condition est vérifiée pour les potentiels suivants :

Hypothèse 2.3.1

Le potentiel \mathcal{V} doit être de la forme

$$(2.3.8) \quad \mathcal{V}(r) := \frac{f(r)}{r^s}, \quad s \geq 1$$

avec $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive à support compact sur $[0, 1]$, continue sur \mathbb{R}^+ et \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$, et tel que $f(0) = 1$, $f'(1) < 0$. On demande enfin que \mathcal{V} soit décroissant et vérifie la condition de Sone (1.1.7) (voir [Son07]) :

$$r\mathcal{V}''(r) + 2\mathcal{V}'(r) \geq 0.$$

Remarque 2.3.1

La condition précédente est notamment vérifiée par le potentiel

$$(2.3.9) \quad \mathcal{V}(r) := \frac{1-r}{r} \mathbb{1}_{r \leq 1},$$

l'hypothèse 2.3.1 n'est donc pas vide!

Remarque 2.3.2

Un potentiel vérifiant la borne (1.1.7) vérifie automatiquement $s \geq 1$.

Proposition 2.3.2

Soit \mathcal{V} un potentiel vérifiant les hypothèses 2.3.1 et $b_\alpha(v - v_, \eta)$ le noyau de collision associé à $\alpha\mathcal{V}$. Il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$(2.3.10) \quad 0 \leq b_\alpha(v - v_*, \eta) \leq C \left(1 + \frac{|v - v_*|^2}{\alpha} \right)^{5/2} |v - v_*|.$$

Si on borne les vitesses par $C|\log \varepsilon|$ on obtient l'estimation attendue.

La preuve du théorème est donnée dans l'annexe 2.A.

En combinant ce projet de théorème (la conjecture 2.3.1 pour des potentiels vérifiant les hypothèses 2.3.1), il serait possible de dériver une équation de Landau linéarisée :

Conjecture 2.3.2 (Approximation du potentiel de Coulomb)

Soit \mathcal{V} un potentiel vérifiant les hypothèses 2.3.1 pour $s = 1$.

On se place dans le scaling de Boltzmann-Grad $\mu\varepsilon^2\mathfrak{d} = 1$ et de collision rasante $\mathfrak{d} = \alpha^2|\log \alpha|$, avec $\alpha = \alpha_\varepsilon$ une suite de la forme $\mathfrak{d} = (\log |\log \varepsilon|)^{-\kappa}$ (avec $\kappa \in (0, 1/3)$) à déterminer).

Alors pour tout $f, g \in L^2(M(v)dz)$ on a

$$(2.3.11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\zeta_\varepsilon^t(h) \zeta_\varepsilon^0(g) \right] - \int h(z) \mathbf{g}_L(t, z) M(v) dz \right| = 0.$$

où $\mathbf{g}_L(t)$ est solution de l'équation de Landau linéarisée :

$$(2.3.12) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{g}_L(t) + v \cdot \nabla_x \mathbf{g}_L(t) &= \mathcal{K} \mathbf{g}_L(t) \\ \mathbf{g}_L(t=0) &= g, \end{aligned}$$

avec \mathcal{K} l'opérateur de Landau linéarisé et $f(0) = 1$ la constante de diffusion.

On remarque que dans le cas $s > 1$, on peut retrouver une équation de Boltzmann linéarisées pour un noyau sans cut-off :

Conjecture 2.3.3 (Approximation d'une loi de puissance)

Soit \mathcal{V} un potentiel vérifiant les hypothèses 2.3.1 pour $s > 1$.

On se place dans le scaling de Boltzmann-Grad $\mu\varepsilon^2\mathfrak{d} = 1$ et de collision rasante $\mathfrak{d} = \alpha^{2/s}$, avec $\alpha = \alpha_\varepsilon$ une suite de la forme $\mathfrak{d} = (\log |\log \varepsilon|)^{-\kappa}$ (avec $\kappa \in (0, 1/3)$) à déterminer).

Alors pour tout $f, g \in L^2(M(v)dz)$ on a

$$(2.3.13) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\zeta_\varepsilon^t(h) \zeta_\varepsilon^0(g) \right] - \int h(z) \mathbf{g}_\infty(t, z) M(v) dz \right| = 0.$$

où $\mathbf{g}_\infty(t)$ est solution de l'équation de Boltzmann linéarisée :

$$(2.3.14) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{g}_\infty(t) + v \cdot \nabla_x \mathbf{g}_\infty(t) &= \mathcal{L}_\infty \mathbf{g}_\infty(t) \\ \mathbf{g}_\infty(t=0) &= g, \end{aligned}$$

L'opérateur \mathcal{L}_∞ est un opérateur de Boltzmann sans cut-off linéarisé, associé au noyau de collision $\tilde{B}_s(v_1 - v_2, \eta)$ du potentiel homogène

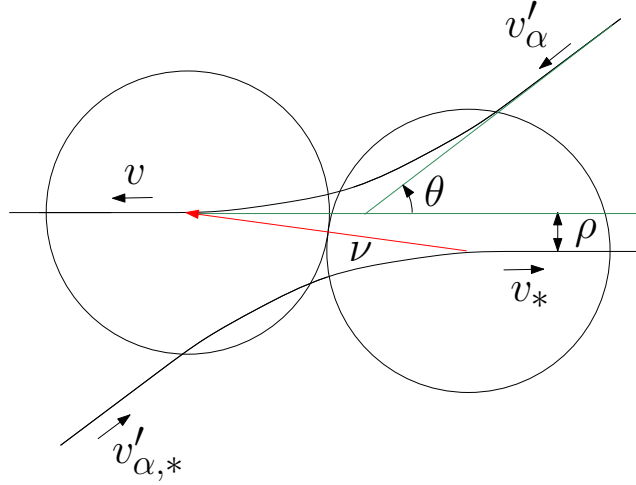
$$(2.3.15) \quad \tilde{\mathcal{V}}_s(r) = \frac{1}{r^s}.$$

2.A Preuve de la proposition 2.3.2

On rappelle rappelle la définition du noyau de collision $b_\alpha(v - v_*, \eta)$ associé au potentiel $\alpha\mathcal{V}$ (définition au paragraphe 1.1.1). On définit $(v'_\alpha, v'_{\alpha,*})$ les vitesses pré-collisionnelles pour deux particules interagissant *via* le potentiel $\alpha\mathcal{V}$, avec des vitesses sortantes (v, v_*) et pour position relative ν (voir la figure).

On définit le vecteur $\eta \in \mathbb{S}^2$ comme

$$\begin{aligned} v'_\alpha &= \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2} \eta \\ v'_{\alpha,*} &= \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2} \eta \end{aligned}$$

FIGURE 2.7 – La collision entre deux particules dans le cas $v + v_* = 0$.

et on définit b_α comme jacobien du changement de variable

$$\begin{aligned} (\nu, v_*) &\mapsto (\eta, v_*) \\ ((v - v_*) \cdot \nu)_+ d\nu dv_* &\rightarrow b_\alpha(v - v_*, \eta) d\eta dv_*. \end{aligned}$$

On définit θ (l'angle de déviation) et ρ (le paramètre d'impact) comme

$$\theta := \left(\eta, \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \right), \quad \rho := \sin \left(\nu, \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \right),$$

où (\vec{a}, \vec{b}) représente l'écart angulaire entre \vec{a} et \vec{b} . On peut montrer que $b_\alpha(|v - v_*|, \theta)$ vérifie la formule (voire le chapitre 8 de [GSRT13])

$$(2.A.1) \quad b_\alpha(|v - v_*|, \theta) = \frac{\rho}{|\sin \theta|} \left| \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right| |v - v_*|.$$

On veut montrer la borne suivante (théorème 2.3.2).

Démonstration : On note comme chapitre 4 $\kappa = \frac{2\alpha}{|v - v_*|}$ et $\Theta := (\pi - \theta)/2$ (Θ croît avec ρ et est entre 0 et $\pi/2$). L'angle Θ est donné par la formule suivante (voir le chapitre 8 de [GSRT13])

$$(2.A.2) \quad \theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{4\alpha\mathcal{V}(r)}{|v_1 - v_2|^2}}} dr,$$

On commence par faire le changement de variable (différent de celui utilisé dans la section 4.3)

$$(2.A.3) \quad u^2 := \frac{\rho^2}{r^2} + 2\kappa\mathcal{V}(r)$$

ce qui donne

$$(2.A.4) \quad \Theta = \arcsin \rho + \int_{\rho}^1 \frac{udu}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{1}{\frac{\rho}{r} - \frac{\kappa r^2 \mathcal{V}'(r)}{\rho}}.$$

On dérive cette équation par rapport à ρ , et en utilisant les hypothèses 2.2.3, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} &= \frac{\kappa}{\sqrt{1-\rho^2}(\rho^2 + \kappa)} \\ &\quad + \int_{\rho}^1 \frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{\left(\frac{\rho}{r} - \frac{r^2 \kappa \mathcal{V}'(r)}{\rho}\right)^3} \left(\frac{\kappa r}{\rho} (r \mathcal{V}''(r) + 2\mathcal{V}'(r)) + \frac{\kappa^2}{\rho^3} (r^2 \mathcal{V}'(r))^2 \right) \\ &\geq \frac{\kappa}{\sqrt{1-\rho^2}(\rho^2 + \kappa)} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \arctan \left(\sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right). \end{aligned}$$

En utilisant que $\Theta(\rho = 0) = 0$ et $\Theta(\rho = 1) = \pi/2$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho} \frac{\kappa}{\sqrt{1-\rho^2}(\rho^2 + \kappa)} d\rho &\leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} - \int_{\rho}^1 \frac{\kappa}{\sqrt{1-\rho^2}(\rho^2 + \kappa)} d\rho \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \arctan \left(\sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) &\leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

En utilisant les bornes usuelles

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin 2x \geq \frac{8}{\pi^2} x \left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\forall x > 0, \arctan(x) \geq \frac{x}{1+x}, \quad \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \geq \frac{1}{1+x},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sin 2\Theta &\geq C \frac{\kappa}{\kappa+1} \frac{\sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} \\ &\geq C \frac{\kappa^{3/2}}{(\kappa+1)^{1/2}} \frac{\rho \sqrt{1-\rho^2}}{\rho^2 + \kappa + 2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\rho^2(1-\rho^2)}. \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec la borne inférieure de $\frac{\partial \Theta}{\partial \rho}$ on obtient

$$\frac{\sin 2\Theta}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \geq C \frac{\kappa^{5/2}}{(1+\kappa)^{1/2} \left(\rho^2 + \kappa + 2\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\rho^2(1-\rho^2)\right)} (\rho^2 + \kappa) \geq C' \frac{\kappa^{5/2}}{(1+\kappa)^{5/2}}.$$

On passe alors à l'inverse et on obtient

$$b_{\alpha}(v - v_*, \eta) \leq \frac{1}{C'} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^{5/2} |v - v_*| \leq C'' \left(1 + \frac{|v - v_*|^2}{\alpha}\right)^{5/2} |v - v_*|$$

ce qui est l'estimation attendue. ■

Chapter 3

Boltzmann-Grad limit of a hard sphere system in a box with isotropic boundary conditions

In this paper we present a rigorous derivation of the Boltzmann equation in a compact domain with isotropic boundary conditions. We consider a system of N hard spheres of diameter ε in a box $\Lambda := [0, 1] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. When a particle meets the boundary of the domain, it is instantaneously reinjected into the box with a random direction, but conserving kinetic energy. We prove that the first marginal of the process converges in the scaling $N\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon \rightarrow 0$ to the solution of the Boltzmann equation, with the same short time restriction of Lanford's classical theorem.

3.1 Introduction

A simple model of gas is the hard sphere gas. Each molecule is described as a little sphere of diameter $\varepsilon > 0$ moving freely along straight lines in a domain $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, and interacting with the other molecules only at distance ε . A classical problem is the study of limits of such a system when the number of particles N goes to infinity. Of course this limit depends deeply on the relation between N and ε . We shall focus here on an intermediate limit which bridges the microscopic scale proportional to ε , and the macroscopic scales where we only see average quantities as the temperature or the mean velocity.

At a mesoscopic scale we look at the distribution $f(t, x, v)$ of one particle in the phase space $\Lambda_x \times \mathbb{R}_v^d$ at time $t \geq 0$. In the case of hard spheres, the only interesting limit of this type is the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$ (see [Gra49]), for which the density of the gas goes to 0 as ε , but the mean distance traveled by a particle between two collisions (the mean free path) is constant. In this regime we expect that the coordinates of two randomly chosen particles are "almost independent" and that the limiting one-particle distribution is governed by the Boltzmann equation

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= Q(f, f), \\ Q(f, f)(v) &:= \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \left(f(v - \nu \cdot (v - v_*)\nu) f(v_* + \nu \cdot (v - v_*)\nu) \right. \\ &\quad \left. - f(v) f(v_*) \right) b(v - v_*, \nu) dv_* d\nu \end{aligned}$$

where the operator $Q(f, f)(x, v)$ describes the variation due to collisions and $b(v - v_*, \nu)$ is a given collision kernel ([Bol96]).

In a fundamental paper [Lan75], Lanford stated a convergence theorem of the hard spheres system for a short time $t < T^*$, T^* depending on the initial condition. A detailed

proof has been provided later on, see in particular [GSRT13, PSS14] for quantitative bounds on the convergence error (including smooth potentials with finite range) in the case of a domain without boundary (see also [Spo81, CIP94, Den18, GG18]). There also exists a proof of long time convergence when the domain is \mathbb{R}^2 or \mathbb{R}^3 and the gas is very diluted (meaning in particular that the initial distribution of particles $f_0(x, v)$ is bounded by a Gaussian $\eta e^{-\frac{|x|^2+|v|^2}{2}}$, with $\eta > 0$ sufficiently small) (see [IP89]).

Adding boundaries is important especially in relation with the problem of nontrivial stationary solutions, which is one of the main domains of application of the Boltzmann equation (see [Cer00, EM20, CP96]). Even without considering the stationary problem, the presence of boundaries leads to several delicate issues. A first one is the modeling itself; a problem which goes back to the origins of kinetic theory (see [Cer00] for a discussion on several different kinds of reflection law).

Let Λ be an open domain of dimension d with a smooth boundary. A first example of reflection law is the specular reflection: when a particle hits the boundary at point x with velocity v_{in} , it is reflected with velocity $v_{\text{out}} := v_{\text{in}} - 2(n(x) \cdot v_{\text{in}})n(x)$ where $n(x)$ is the outer normal vector of $\partial\Lambda$ in x . Thus at the boundary the distribution verifies the condition $f(t, x, v_{\text{out}}) = f(t, x, v_{\text{in}})$. This dynamics encodes complications because of possible focusing. Note however Théophile Dolmaire's thesis (see [Dol19, Dol22]) where a Lanford theorem in the half space has been proved.

A second and very famous model are the thermal (or Gaussian, diffusive) boundary conditions: when a particle meets the boundary at point x , it is reflected with velocity v_{out} following the probability law

$$d\mathbb{P}(v_{\text{out}}) = (v_{\text{out}} \cdot n(x))_- M_w(x, v_{\text{out}}) dv_{\text{out}}, \quad M_w(x, v) := \frac{e^{-\frac{|v|^2}{2T(x)}}}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}} T(x)^{\frac{d+1}{2}}}$$

where $T(x)$ represents the temperature of the boundary at point x . Thus the distribution verifies for all (x, v_{out}) such that $x \in \partial\Lambda$, $v_{\text{out}} \cdot n(x) < 0$

$$f(t, x, v_{\text{out}}) = M_w(x, v_{\text{out}}) \int f(t, x, v_{\text{in}}) (v_{\text{in}} \cdot n(x))_+ dv_{\text{in}}.$$

The system of hard spheres with these boundary conditions has fluctuating energy, at variance with the Lanford's setting which typically models an isolated system.

The usual argument for the rigorous convergence in the Boltzmann-Grad limit looks hardly adaptable in this case. Note in particular, that we should answer first the following question (which can be found in [Cer00]): does the Boltzmann equation admit stationary solutions when the system is in contact with a reservoir of prescribed temperature? The question is not answered in full generality. However if the temperature at the boundary is smooth with small variations, then there are existence theorems for the stationary Boltzmann equation for any Knudsen number (the inverse of the mean free path) (see [Gui70, Gui72, EGKM13, EGKM18, EM20]). Unfortunately the scheme of Lanford's proof requires a priori estimates involving infinitely many reference distributions with increasing temperature (see for example chapter 5 of [GSRT13] or Section 3.4.2 of the present paper). In addition note that we do not even know if the hard sphere dynamics with Gaussian reflection is a well defined process (see [Cat]; however this looks just a technical problem and the process is indeed well defined for suitable smooth interactions (see [GLP81])).

In the following we will therefore investigate a simpler model: isotropic reflection model. It has been described by Levermore in [Lev12]. In this model, a particle conserves its velocity when it reaches the boundary and is reflected in a random direction. More precisely,

an incoming particle with coordinates (x, v_{out}) has outgoing velocity v_{in} following the law

$$d\mathbb{P}(v_{\text{out}}) = c_d \frac{(v' \cdot n(x))_-}{|v_{\text{out}}|^d} \delta_{|v_{\text{out}}| - |v_{\text{in}}|} dv_{\text{out}}, \quad \text{where } c_d := \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\omega \cdot \vec{e}_1)_+ d\omega \right)^{-1}$$

with δ the Dirac mass, c_d a normalization constant and \vec{e}_1 a unit vector. With this reflection law the distribution has to respect the following boundary condition: for $x \in \partial\Lambda$, $v_{\text{out}} \cdot n(x) > 0$,

$$f(t, x, v_{\text{out}}) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(t, x, |v_{\text{out}}|\omega) c_d (n(x) \cdot \omega)_+ d\omega.$$

Since the energy is conserved and any Gaussian distribution is a stationary measure, we can expect to be able to adapt Lanford's strategy.

It is worth mentioning that this system in the hydrodynamic limit leads to an adiabatic model: the temperature verifies Neumann's boundary condition $n(x) \cdot \nabla \theta_{\partial\Omega} = 0$ and the mean velocities verify the Dirichlet boundary condition $u_{\partial\Omega} = 0$ (as discussed in [LB19], see also appendix 3.B).

The paper is organized as follows.

We give a proper definition of the process in Section 3.2 and we derive the evolution law of a symmetric distribution of particles in Section 3.3: the BBGKY Duhamel series 3.3.5. In this part a geometric representation of the Duhamel series is crucial, which is usually referred in the literature as *pseudotrajectories expansion* (see [GSRT13]). Section 3.4 is dedicated to the formal limit, namely the Boltzmann Duhamel series. In Section 3.5 we state the Lanford's theorem in a domain with stochastic boundary (Theorem 3.5.1). Section 3.6 is devoted to the main step of the proof: the "mean" convergence of the hard sphere process to its formal limit (the *punctual process*).

In Section 6 we shall need detailed considerations involving the hard-sphere process. In order to simplify this step we have to restrict to the simple domain $\Lambda := [0, 1] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. For simplicity of presentation we will work on this domain throughout the whole paper, although we will really use this simplification in Section 6 only. One of the main ingredients is that outside a small set of particle configurations and of time variables, hard sphere and punctual process have the same velocities. Then the error between hard spheres and punctual particles comes only from shifts of size ε at each collision. If we look at a general domain $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ we lose such simple feature. We believe that the theorem remains true, but the proof would be certainly more delicate.

3.2 The model

We will now give a precise definition of the process.

We will use the notation $\mathbf{a}_n = (a_1, \dots, a_n)$.

We want to describe the motion of N hard spheres of diameter ε in a smooth domain Λ . In the following we take $\Lambda = [0, 1] \times \mathbb{T}^2$ where $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. It is a simple model of compact domain with boundary: the boundary is separated in two parallel planes and a particle has to cross a minimum distance between two reflections. We use this simplification only in section 6. More general domains could be considered at the expense of more intricate geometrical estimates.

The particles move along straight lines until they meet either the boundary of Λ or another particle. When two particles meet, there is an elastic *collision*. When a particle reaches the boundary of Λ at the point x with incoming velocity v^{in} , it is *reflected* at the same point x with velocity v^{out} following a probability law $K_x(v^{\text{in}}|v^{\text{out}})(v^{\text{out}} \cdot n(x))_+ dv^{\text{out}}$, where $n(x)$ is the outer normal vector of the surface $\partial\Lambda$. We say that there is a *reflection*.

It is not obvious that such process is well defined, and we will restrict in the following to the case of isotropic reflection :

$$(3.2.1) \quad K_x(v^{\text{in}}|v^{\text{out}})(v^{\text{out}} \cdot n(x))_- dv^{\text{out}} = \frac{c_3 \delta(|v^{\text{in}}| - |v^{\text{out}}|)(v^{\text{out}} \cdot n(x))_- dv^{\text{out}}}{|v^{\text{out}}|^3},$$

$$\text{with } c_3 := \left(\int_{\mathbb{S}^2} (\omega \cdot \bar{\mathbf{e}}_1)_+ d\omega \right)^{-1} = \frac{1}{\pi}$$

where $\bar{\mathbf{e}}_1$ is the vector $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Note that in the case of isotropic reflection both measures $K_x(v^{\text{in}}|v^{\text{out}})(v^{\text{out}} \cdot n(x))_- dv^{\text{out}}$ and $K_x(v^{\text{in}}|v^{\text{out}})(v^{\text{in}} \cdot n(x))_+ dv^{\text{in}}$ are a probability measure. Thus we can in a certain sense reverse the hard sphere process. This will be the main ingredient of the construction of the process below. In the case of Gaussian boundary conditions, $K_x(v^{\text{in}}|v^{\text{out}})(v^{\text{in}} \cdot n(x))_+ dv^{\text{in}} = M_w(x, v^{\text{out}})(v^{\text{in}} \cdot n(x))_+ dv^{\text{in}}$ which is not a probability measure and the following strategy cannot be applied.

3.2.1 Construction of the stochastic process

To discuss the well-posedness of the system, we introduce the phase space

$$(3.2.2) \quad \mathcal{D}_\varepsilon^N := \{(\mathbf{x}_N, \mathbf{v}_N) = (x_1, \dots, x_N, v_1, \dots, v_N) \in \Lambda^N \times \mathbb{R}^{3N} \mid \forall i \neq j, |x_i - x_j| > \varepsilon\}$$

and the probability space

$$(3.2.3) \quad \Omega := \{\bar{\omega} = (\omega^j)_{j \in \mathbb{Z}^*} \text{ with } \omega^j \in \mathbb{S}^2, \omega^j \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 > 0 \text{ if } j > 0, \omega^j \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 < 0 \text{ if } j < 0\}.$$

We assign to Ω the measure $d\mathbb{P}(\bar{\omega} = (\omega^j))$ which is the probability measure of sequences of independent random variables such that ω^j follows the law $c_3(\omega^j \cdot \bar{\mathbf{e}}_1)_- d\omega^j$ for $j < 0$ and $c_3(\omega^j \cdot \bar{\mathbf{e}}_1)_+ d\omega^j$ for $j > 0$.

Let Γ be the function on $\partial\Lambda$ such that

$$\Gamma(x) := \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \{0\} \times \mathbb{T}^2 \\ -1 & \text{for } x \in \{1\} \times \mathbb{T}^2. \end{cases}$$

We define now a dynamics on the extended phase space $\mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$. Let

$$(\mathbf{z}_N^0, \bar{\omega}_N^0) = (\mathbf{x}_N^0, \mathbf{v}_N^0, \bar{\omega}_1^0, \dots, \bar{\omega}_N^0) \in \mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$$

and $t > 0$ be a time,

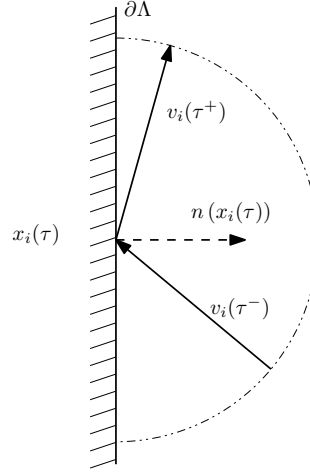
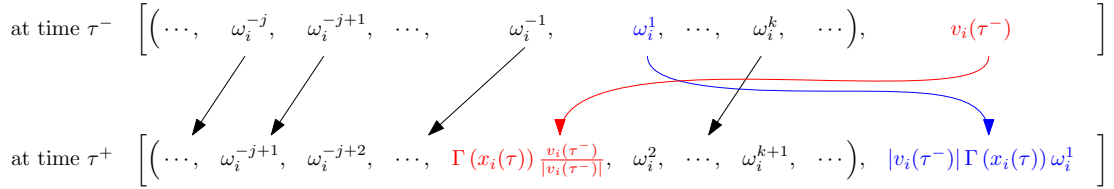
- $(\mathbf{z}_N^\varepsilon(0), \bar{\omega}_N^\varepsilon(0)) = (\mathbf{z}_N^0, \bar{\omega}_N^0)$;
- until $\mathbf{z}_N^\varepsilon(t)$ reaches the boundary of $\mathcal{D}_\varepsilon^N$, $\bar{\omega}_N^\varepsilon(t)$ is constant and each $z_i^\varepsilon(t)$ ($i \in \{1, \dots, N\}$) moves along straight lines;
- if $|x_i^\varepsilon(t) - x_j^\varepsilon(t)| = \varepsilon$, $v_i^\varepsilon(t^+)$ and $v_j^\varepsilon(t^+)$ are given by an elastic collision between the two particles :

$$(3.2.4) \quad \begin{cases} v_i^\varepsilon(t^+) = v_i^\varepsilon(t^-) - \nu_{i,j} \cdot (v_i^\varepsilon(t^-) - v_j^\varepsilon(t^-)) \nu_{i,j} \\ v_j^\varepsilon(t^+) = v_j^\varepsilon(t^-) + \nu_{i,j} \cdot (v_i^\varepsilon(t^-) - v_j^\varepsilon(t^-)) \nu_{i,j} \end{cases}$$

with $\nu_{i,j} := \frac{x_i^\varepsilon(t) - x_j^\varepsilon(t)}{|x_i^\varepsilon(t) - x_j^\varepsilon(t)|}$ and where t^\pm indicate the limit from the future/past.

- if $x_i^\varepsilon(t)$ meets the boundary of Λ , we record the in-coming direction of $v_i^\varepsilon(t^-)$ and $v_i^\varepsilon(t^+)$ takes the out-coming direction :

$$(3.2.5) \quad \begin{cases} v_i^\varepsilon(t^+) = |v_i^\varepsilon(t^-)| \Gamma(x_i^\varepsilon(t)) \omega_i^{\varepsilon,1}(t^-) \\ \omega_i^{\varepsilon,-1} = \Gamma(x_i^\varepsilon(t)) \frac{v_i^\varepsilon(t^-)}{|v_i^\varepsilon(t^-)|} \\ \forall j \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}, \omega_i^{\varepsilon,j}(t^+) = \omega_i^{\varepsilon,j+1}(t^-); \end{cases}$$

Figure 3.1 – Reflection of particle i at time τ .Figure 3.2 – Evolution of $\bar{\omega}_i$ when particle i has a reflection at time τ .

then we iterate the process.

For example in the case with only one particle and after k reflections, $\bar{\omega}_1^\varepsilon(t)$ is equal to

$$\left(\begin{array}{cccccccc} \dots, & \omega_1^{0,-2}, & \omega_1^{0,-1}, & \Gamma(x_1^1) \frac{v_1^1}{|v_1^1|}, & \Gamma(x_1^2) \frac{v_1^2}{|v_1^2|}, & \dots, & \Gamma(x_1^k) \frac{v_1^k}{|v_1^k|}, & \omega_1^{0,k+1}, & \dots \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc} & -k-2 & -k-1 & -k & -k+1 & & -1 & 1 & \end{array} \right)$$

where $x_1^i := x_1^\varepsilon(t_i)$ and $v_1^i := v_1^\varepsilon(t_i^-)$ are the position of the particle and its incoming velocity at the i -th reflection.

In the same way we can define the backward dynamics for $t < 0$.

Note that the variables $(\omega_i^j)_{j < 0}$ are used to record the reflections. This will be practical to reconstruct the dynamics backwards, independently of the number of reflections.

3.2.2 Well-posedness of the process

We denote $\phi_N^{\varepsilon,t}(z_N, \bar{\omega}_N) = (z_N^\varepsilon(t), \bar{\omega}_N^\varepsilon(t))$ the flow described above with initial conditions $(z_N, \bar{\omega}_N)$. It is not well defined everywhere and we can have *bad initial data* which lead to

- a collision involving more than two particles at some time,
- two collisions/reflections at the same time,
- infinitely many collisions/reflections during a finite time,
- grazing collisions/reflections.

However such "pathological" trajectories are exceptional: if we denote $\mathcal{B}^N \subset \mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$ the set of bad initial data and $\mathbb{P}^N(d\bar{\omega}_N) := \mathbb{P}(d\bar{\omega}_1) \otimes \dots \otimes \mathbb{P}(d\bar{\omega}_N)$, we have

Proposition 3.2.1

The pathological set \mathcal{B}^N is of zero measure for $d z_N \mathbb{P}^N(d\bar{\omega}_N)$, the dynamics on $\mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$ is well defined for almost all initial data and $\phi_N^{\varepsilon,t}$ conserves the measure: for all Borel

sets $A \subset \mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$, $\phi_N^{\varepsilon,t}(A \setminus \mathcal{B}^N)$ is measurable, with the same measure of A .

This is an adaptation of the proof of Alexander [Ale75] and it stems from the following lemma. We denote B_R^N the euclidean ball of radius R in \mathbb{R}^{3N} .

Lemma 3.2.2

Let $R > 0$ be given, and let δ be a real number in $(0, \varepsilon/2)$. Let

$$(3.2.6) \quad I := \left\{ (z_N, \bar{\omega}_N) \in \Lambda^N \times B_R^N \times \Omega^N \mid \begin{array}{l} \text{there are two shocks} \\ \text{(reflections or collisions) during the time interval } [0, \delta] \end{array} \right\}.$$

Then for ε small enough, $|I| \leq C(N, \varepsilon, R)\delta^2$.

Proof : We have to treat the different cases with at least two shocks (reflections or collisions) in the same interval $[0, \delta]$.

First consider the case where at least two particles are involved. Because velocities are bounded by R , if particle i has a collision with particle j in the time interval $[0, \delta]$, the distance $d(x_i(0), x_j(0))$ is bounded by $2\delta R$. In the same way particle i can have a reflection only if $d(x_i(0), \partial\Lambda) < \delta R$. Thus there can be two shocks only if $(z_N(0), \bar{\omega}_N(0))$ is in

$$I_1 := \left\{ (z_N, \bar{\omega}_N) \in \Lambda^N \times B_R^N \times \Omega^N \mid \begin{array}{l} \exists i \neq j, \text{ and } k, l \notin \{i, j\}, \\ \left(\begin{array}{l} d(x_i, B_\varepsilon^1(x_k) \cup \partial\Lambda) \leq 2\delta R \\ d(x_j, B_\varepsilon^1(x_l) \cup \partial\Lambda) \leq 2\delta R \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

where $d(x, A)$ is the euclidean distance of a point x to a subset A . The set I_1 is of measure at most $[2R\delta|\partial\Lambda| + (4/3)\pi((\varepsilon + 2R\delta)^3 - \varepsilon^3)]^2 \leq C(N, \varepsilon, R)\delta^2$ for δ small enough.

Then we pass to the case where there is one particle which reflects twice the boundary on the interval $[0, \delta]$. This case is made impossible for $\delta < 1/R$ because between two reflections a particle has to cross $(0, 1) \times \mathbb{T}^2$. \blacksquare

Proof of Proposition 3.2.1 : Fix $R > 0$ and $t > 0$. Let $\delta < \varepsilon/2$ be a small parameter such that t/δ is an integer. Lemma 3.2.2 shows that there exists a subset $I_0(\delta, R)$ of $\Lambda^N \times B_R^N \times \Omega^N$ such that outside of I_0 there is at most one shock in the time interval $[0, \delta]$. Its measure is at most $C(N, \varepsilon, R)\delta^2$. Observe that the set leading to grazing shocks is of zero measure.

Note that the flow is conservative where it is well defined. Indeed the boundary conditions for collisions are conservative. For the reflection, the map

$$(x, v, \omega^1) \mapsto \left(x + \tau(x, v)v + (t - \tau(x, v))|v|\omega^1, |v|\omega^1, \omega^{-1}(t) := \Gamma(x + \tau(x, v)v)/|v| \right)$$

where $\tau(x, v)$ is the time of travel of one particle to the boundary, is conservative. For the other $\omega^i, i \notin \{0, -1\}$, we just apply the shift $(\omega^i) \mapsto (\omega^{i+1})$, which is also conservative.

Hence there is no pathological trajectory in $\Lambda^N \times B_R^N \times \Omega^N \setminus I_0(\delta, R)$. We recall that the set $\Lambda^N \times B_R^N \times \Omega^N$ is stable under the flow (the energy $\frac{1}{2} \sum_i |v_i|^2$ is conserved). We iterate the procedure and construct a set $I_1(\delta, R)$ such that outside I_1 there is at most one shock in the interval $[\delta, 2\delta]$. Because the flow is conservative, $I_1(\delta, R)$ is of size at most $C(N, \varepsilon, R)\delta^2$. More generally we can construct a sequence of sets $(I_k(\delta, R))_k$ such that outside $\bigcup_{0 \leq k \leq K} I_k(\delta, R)$ there is no pathological trajectory during the interval $[0, (K+1)\delta]$.

We define $I(\delta, t, R)$ as:

$$I(\delta, t, R) := \bigcup_{0 \leq k \leq t/\delta} I_k(\delta, R).$$

Each set $I(\delta, t, R)$ is of size at most $C(N, \varepsilon, R)\delta^2 \cdot t/\delta = C(N, \varepsilon, R)t\delta$. Setting

$$I(t, R) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I(t/n, t, R),$$

$I(t, R)$ is of null-measure and outside it there is no pathological trajectory on $[0, t]$. We take the union \mathcal{B}^N of the $I(t, R)$ for a sequence of t and R going to infinity. Outside it there is no pathological trajectory. This concludes the proof. \blacksquare

3.3 The BBGKY hierarchy and its pseudo-trajectories

3.3.1 Stochastic semigroup and expression of the hierarchy

We will use the following notation: for $1 \leq k < l \leq n$ two integers, $\mathbf{a}_{k,l} = (a_k, \dots, a_l)$.

We want to study a system of N identical particles, distributed at time zero according to a probability μ_N^0 on $\mathcal{D}_\varepsilon^N$. Because all the particles are indiscernible, the measure μ_N is assumed stable under permutation of particle labels.

We define by duality the semi-group $T_N^\varepsilon(t)$ on $\mathcal{M}_0(\mathcal{D}_\varepsilon^N)$, the space of finite signed measures μ_N such that the set of bad trajectories $\mathcal{B}^N \subset \mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$ is of measure zero for $\mu_N \otimes \mathbb{P}^N$. For any bounded continuous function $\varphi : \mathcal{D}_\varepsilon^N \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(3.3.1) \quad \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^N} \varphi(\mathbf{z}_N) (T_N^\varepsilon(t) \mu_N)(d\mathbf{z}_N) := \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^N} \left(\int_{\Omega^N} \varphi \left[\phi_N^{\varepsilon,t}(\mathbf{z}_N^0, \bar{\omega}_N^0) \right] d\mathbb{P}^N(\bar{\omega}_N^0) \right) \mu_N(d\mathbf{z}_N^0).$$

In the case of density measures, we have an explicit formula :

Proposition 3.3.1

For $W_{0,N} \in L^1 \cap L^\infty(\mathcal{D}_\varepsilon^N)$,

$$(3.3.2) \quad T_N^\varepsilon(t)(W_{0,N}(\mathbf{z}_N) d\mathbf{z}_N) = \left(\int_{\Omega^N} W_{0,N} \left[\phi_N^{\varepsilon,-t}(\mathbf{z}_N^0, \bar{\omega}_N^0) \right] d\mathbb{P}^N(\bar{\omega}_N^0) \right) d\mathbf{z}_N^0, \text{ with } t > 0.$$

Proof : It is a direct application of the conservation of measure of $\phi_N^{\varepsilon,t}$, Proposition 3.2.1. \blacksquare

We denote $W_{0,N}$ the initial density distribution of particles at time 0 and $W_N(t)$ the evolution of this distribution. To observe some limit behavior, we have to fix the number of particles s that we study. Let $(f_N^{(s)})_{1 \leq s \leq N}$ be the marginals of $W_{0,N}$ and $(f_{0,N}^{(s)}(t))_{1 \leq s \leq N}$ be the marginals of $W_N(t)$:

$$(3.3.3) \quad \forall \mathbf{z}_s \in \mathcal{D}_\varepsilon^s, f_{0,N}^{(s)}(\mathbf{z}_s) := \int W_{0,N}(\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_{s+1,N}) d\mathbf{z}_{s+1,N}$$

and the same thing for $f_N^{(s)}(t)$. By convention we extend functions on $\mathcal{D}_\varepsilon^s$ by 0 outside $\mathcal{D}_\varepsilon^s$.

The following theorem describes the evolution of the marginals:

Theorem 3.3.2

Let $W_{0,N}$ be a function in $L^\infty \cap L^1(\mathcal{D}_\varepsilon^N)$. Its marginals $(f_{0,N}^{(s)})_s$ verify the series expansion of the BBGKY hierarchy (we will call it in the following the BBGKY hierarchy):

$$(3.3.4) \quad f_N^{(s)}(t) =: \sum_{r=0}^{N-s} \alpha(N-r, N) \varepsilon^{2r} Q_{s,s+r}^\varepsilon(t) f_{0,N}^{(s+r)}$$

where $\alpha(r, s) = r(r-1) \cdots (r-s+1)$,

$$(3.3.5) \quad Q_{s,s+r}^\varepsilon(t) f_{0,N}^{(s+r)} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{r-1}} dt_1 \cdots dt_r T_s^\varepsilon(t-t_1) C_{s,s+1}^\varepsilon \cdots \\ \cdots C_{s+r-1,s+r}^\varepsilon T_{s+r}^\varepsilon(t_r) f_{0,N}^{(s+r)}$$

and $C_{s,s+1}^\varepsilon$ is the collision operator:

$$(3.3.6) \quad C_{s,s+1}^\varepsilon := \sum_{i=1}^s C_{s,s+1}^{\varepsilon,i,+} - C_{s,s+1}^{\varepsilon,i,-}$$

$$(3.3.7) \quad C_{s,s+1}^{\varepsilon,i,+} f^{(s+1)}(\mathbf{z}_s) \\ := \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3} f^{(s+1)}(\cdots, x_i, v'_i, \cdots, x_i + \varepsilon \nu, v'_{s+1}) (\nu \cdot (v_{s+1} - v_i))_+ d\nu dv_{s+1}$$

$$(3.3.8) \quad C_{s,s+1}^{\varepsilon,i,-} f^{(s+1)}(\mathbf{z}_s) := \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3} f^{(s+1)}(\mathbf{z}_s, x_i + \varepsilon \nu, v_{s+1}) (\nu \cdot (v_{s+1} - v_i))_- d\nu dv_{s+1}$$

and (v_i, v_{s+1}) is the scattering of (v'_i, v'_{s+1}) (see Equation 3.2.4).

The strategy of the proof (presented in section 3.3.3 below) is an adaptation of [PS15]. We begin by expanding the $Q_{s,s+r}^\varepsilon(t) f_{0,N}^{(s+r)}$. We define \mathfrak{A}_s^{s+r} as the set of *collision trees*

$$(3.3.9) \quad \mathfrak{A}_s^{s+r} := \{a := (a(k))_{s < k \leq s+r} \in \mathbb{N}^r, 1 \leq a(k) \leq k-1\}$$

and $\sigma := (\sigma_k)_{s < k \leq s+r} \in \{\pm 1\}^r$. Then we have

$$(3.3.10) \quad Q_{s,s+r}^\varepsilon(t) f_{0,N}^{(s+r)} = \sum_{(a,\sigma) \in \mathfrak{A}_s^{s+r} \times \{\pm 1\}^r} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{r-1}} dt_r \cdots dt_1 \\ T_s^\varepsilon(t-t_1) C_{s,s+1}^{\varepsilon,a(s+1),\sigma_{s+1}} \cdots C_{s+r-1,s+r}^{\varepsilon,a(s+r),\sigma_{s+r}} T_{s+r}^\varepsilon(t_r) f_{0,N}^{(s+r)}.$$

Because T_s^ε is the semigroup associated to the hard sphere process, we can rewrite the integral with a characteristic formula. It is the objective of the next section.

3.3.2 The pseudotrajectories development

We begin by rewriting 3.3.5 with an explicit "characteristic" formula associated to the *interacting process*. It gives a precise sense to solution of the BBGKY hierarchy with no regularity assumed on initial data, as measures. Ultimately it will permit to compare the hierarchy with its formal limit.

We define for $s, r \in \mathbb{N}$ the pseudotrajectory $\zeta_{s,s+r}^\varepsilon(\tau, t, \mathbf{z}_s, (\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1,s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}, a, \sigma)$ where :

$$- (a, \sigma) \in \mathfrak{A}_s^{s+r} \times \{\pm 1\}^r,$$

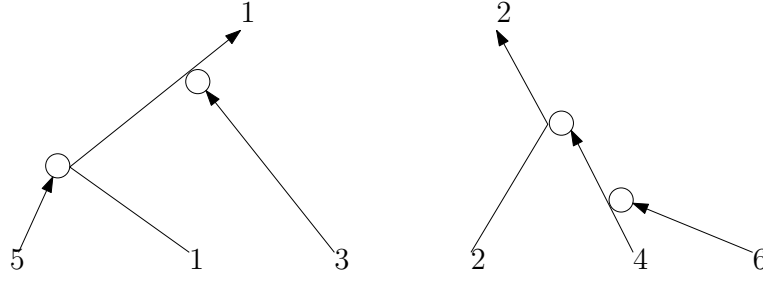


Figure 3.3 – Pseudotrajectory associated with collision parameters $((1, -)_3, (2, +)_4, (1, +)_5, (4, -)_6)$.

- $\tau \in [0, t]$,
- $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r} := (t_i, \nu_i, \bar{v}_i)_{s < i \leq s+r} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3)^r$ the *collisions parameters*, with $t > t_{s+1} > \dots > t_{s+r} > 0$,
- $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s} = (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{r+s}) \in \Omega^{r+s}$ the *reflections parameters* of all particles.

The number of particles of $\zeta_{s, s+r}^\varepsilon(\tau)$ is not constant: for τ between t_k and t_{k+1} there are $s+k$ particles (by convention, $t_s := t$ and $t_{r+s+1} = 0$). Finally we denote $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}^\varepsilon(\tau)$ the evolution of the reflection parameters. We define $(\zeta_{s, s+r}^\varepsilon(\tau), \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}^\varepsilon(\tau))$ by

- $(\zeta_{s, s+r}^\varepsilon, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}^\varepsilon)(t) := (\mathbf{z}_s, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r})$,
- for $\tau \in (t_{k+1}, t_k)$, $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{k+1, s+r}^\varepsilon(\tau)$ is constant and $(\zeta_{s, s+r}^\varepsilon(\tau), \bar{\boldsymbol{\omega}}_{1, k}(\tau))$ follow the hard sphere backward flow described at section 3.2.1,
- at time t_k^+ , a particle is added at position $x_k^\varepsilon(t_k) = x_{a(k)}^\varepsilon(t_k) + \varepsilon \nu_k$ and velocity \bar{v}_k .
If $\sigma = 1$, we have $(\bar{v}_k - v_{a(k)}(t_k^+)) \cdot \nu_k > 0$ and we apply the scattering of velocities. Else if $\sigma_k = -1$, we do not apply scattering.

Here and below, with a slight abuse of notation, $(x^\varepsilon(\tau), v^\varepsilon(\tau))$ designate the coordinates of pseudotrajectories (which are different from coordinates of the stochastic trajectories introduced in section 3.2.1).

We denote $\mathcal{G}^\varepsilon(\mathbf{z}_s, t, a, \boldsymbol{\sigma})$ the set of admissible coordinates, *i.e.* the $((\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s})$ such that the pseudo-trajectory is well defined according to the previous iteration, and

$$(3.3.11) \quad \begin{aligned} & d\Lambda_{a, \boldsymbol{\sigma}}^\varepsilon((\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}) \\ & := \left(\prod_{k=s+1}^{s+r} \left[\sigma_k \nu_k \cdot (\bar{v}_k - v_{a(k)}^\varepsilon(t_k^+)) \right]_+ dt_k d\bar{v}_k d\nu_k \right) \mathbb{P}^{s+r}(d\bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}). \end{aligned}$$

Then the formula 3.3.5 becomes

$$(3.3.12) \quad \begin{aligned} f_N^{(s)}(t, \mathbf{z}_s) &= \sum_{r=0}^{N-s} \alpha(N-s, r) \varepsilon^{2r} \sum_{a, \boldsymbol{\sigma}} \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{s+r} \\ &\quad \times \int_{\mathcal{G}^\varepsilon(\mathbf{z}_s, t, a, \boldsymbol{\sigma})} d\Lambda_{a, \boldsymbol{\sigma}}^\varepsilon((\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}) f_{0, N}^{(s+r)}(\zeta^\varepsilon(0)). \end{aligned}$$

3.3.3 Proof of Theorem 3.3.2

Now we give a dual form of the previous equation. The idea is to look at the application

$$(\mathbf{z}_s, (\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}) \mapsto (\zeta^\varepsilon(0), \bar{\boldsymbol{\omega}}^\varepsilon(0))$$

from $\mathcal{D}_\varepsilon^s \times \mathcal{G}^\varepsilon(a, \boldsymbol{\sigma})$ to $(\mathcal{D}_\varepsilon^{s+r} \times \Omega^{s+r}) \setminus \mathcal{B}^{s+r}$ which is a local homeomorphism that sends the measure $\varepsilon^{2r} d\mathbf{z}_s d\Lambda^\varepsilon$ into $d\zeta^\varepsilon(0) d\mathbb{P}^{r+s}(\bar{\boldsymbol{\omega}}^\varepsilon(0))$. It is not injective since an initial data can

give different pseudotrajectories depending on whether a collision is seen as the *creation* of a particle in the pseudotrajectory or as a *recollision* (a collision between two particles that already exist). Nevertheless the number of collisions is locally constant and finite. Then indexing on a, σ and a new discrete parameter $M \in [1, \bar{M}] \subset \mathbb{N}$, we can define the inverse flow $(\zeta_s^{b,\varepsilon}, \bar{\omega}_{s+r}'')(t, \mathbf{z}_{s+r}, \bar{\omega}_{s+r}, a, \sigma, M)$. Because the number of collisions is almost surely finite, \bar{M} is also almost surely finite and locally constant (we put $\bar{M} = 0$ outside the image of the homeomorphism). Thus the equation 3.3.5 can be rewritten in the weak sense as for all bounded continuous functions φ defined on $\mathcal{D}_\varepsilon^s$,

$$(3.3.13) \quad \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^s} \varphi(\mathbf{z}_s) f_N^{(s)}(t, \mathbf{z}_s) d\mathbf{z}_s = \sum_{r=0}^{N-s} \alpha(N-s, r) \sum_{a \in \mathfrak{A}_s^{s+r}, \sigma} \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{s+r} \\ \times \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^{s+r} \times \Omega^{r+s}} \sum_{M=1}^{\bar{M}} \varphi(\zeta_s^{b,\varepsilon}(t)) f_{0,N}^{(s+r)}(\mathbf{z}_{s+r}) d\mathbf{z}_{s+r} d\mathbb{P}^{s+r}(\bar{\omega}_{s+r}).$$

To check this equality, we prove it in the probability space. Note that Ω is a compact metric space as countable product of compact spaces, so $\mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$ is a Polish space.

We find an analogue to T_N^ε on $\mathcal{D}_\varepsilon^N$. Let $\mu_{0,N}$ be a measure in $\mathcal{M}_0(\mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N)$, the set of finite signed measures stable under permutation of variables and such that \mathcal{B}^N has zero measure. We define $H_N(t)\mu_{0,N}$ by duality: for each φ bounded continuous function on $\mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$,

$$(3.3.14) \quad \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N} \varphi(\mathbf{z}_N, \bar{\omega}_N) (H_N(t)\mu_{0,N})(d\mathbf{z}_N, d\bar{\omega}_N) \\ := \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N} \varphi(\phi_N^{\varepsilon,t}(\mathbf{z}_N, \bar{\omega}_N)) \mu_{0,N}(d\mathbf{z}_N, d\bar{\omega}_N).$$

Next, let $(\mu_{0,N}^{(s)})_{1 \leq s \leq N}$ be the marginals of $\mu_{0,N}$, and $(\mu_N^{(s)}(t))_{1 \leq s \leq N}$ the marginal of $H_N(t)\mu_{0,N}$. Then it suffices to prove that for all bounded continuous functions φ_s on $\mathcal{D}_\varepsilon^s \times \Omega^s$, we have

$$(3.3.15) \quad \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^s \times \Omega^s} \varphi_s(\mathbf{z}_s, \bar{\omega}_s) d\mu_N^{(s)}(t)(\mathbf{z}_s, \bar{\omega}_s) \\ = \sum_{r=0}^{N-s} \alpha(N-s, r) \sum_{a \in \mathfrak{A}_s^{s+r}, \sigma} \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{s+r} \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^{s+r} \times \Omega^{s+r}} \sum_{M=1}^{\bar{M}} \varphi_s(\zeta_s^{b,\varepsilon}(t), \bar{\omega}_s''(t)) d\mu_{0,N}^{(s+r)} \\ =: \sum_{r=0}^{N-s} \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^{r+s} \times \Omega^{r+s}} \varphi_s(\mathbf{z}_s, \bar{\omega}_s) (\mathcal{T}_{s,s+r}(t)\mu_{0,N}^{s+r})(d\mathbf{z}_{s+r}, d\bar{\omega}_{s+r})$$

where the $\mathcal{T}_{s,s+r}(t)(\mu_{0,N}^{(s+k)})$ are defined by duality.

Because $\mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$ is a Polish space and following [PS15], it is sufficient to prove equality 3.3.15 for *empirical density distribution* defined as follow.

Let $(\mathbf{z}_N, \bar{\omega}_N) \in \mathcal{D}_\varepsilon^N \times \Omega^N$ be such that the dynamics is well defined. We define the empirical density distribution as the measure

$$\Delta(\mathbf{z}_N, \bar{\omega}_N)(\zeta_1, \bar{\omega}'_1, \dots, \zeta_N, \bar{\omega}'_N) := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N^N} \prod_{i=1}^N \delta_{(\zeta_i, \bar{\omega}'_i) = (z_{\sigma(i)}, \bar{\omega}_{\sigma(i)})}$$

where \mathfrak{S}_k^N is the set of injection of $\{1, \dots, k\}$ into $\{1, \dots, N\}$.

The k -th marginal of $\Delta(\mathbf{z}_N, \bar{\omega}_N)$ is

$$(\Delta(\mathbf{z}_N, \bar{\omega}_N))^{(k)}(\zeta_1, \bar{\omega}'_1, \dots, \zeta_k, \bar{\omega}'_k) = \frac{(N-k)!}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k^N} \prod_{i=1}^k \delta_{(\zeta_i, \bar{\omega}'_i) = (z_{\sigma(i)}, \bar{\omega}_{\sigma(i)})}$$

and we have immediately its evolution with respect to the hard spheres dynamics:

$$H_N(t)\Delta(\mathbf{z}_N, \bar{\omega}_N) = \Delta\left(\phi_N^{\varepsilon, -t}(\mathbf{z}_N, \bar{\omega}_N)\right).$$

First there exists a finite sequence of times $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = t$ such that on each segment $[t_i, t_{i+1}]$ there is only one collision or a reflection. In addition we impose that if the collision or the reflection implied the particles k and l ,

$$\begin{cases} \phi_{N-1}^{\varepsilon, \tau}(\mathbf{z}_{1, k-1}^\varepsilon(t_i), \mathbf{z}_{k+1, N}^\varepsilon(t_i), \bar{\omega}_{1, k-1}^\varepsilon(t_i), \bar{\omega}_{k+1, N}^\varepsilon(t_i)) \\ \phi_{N-1}^{\varepsilon, \tau}(\mathbf{z}_{1, l-1}^\varepsilon(t_i), \mathbf{z}_{l+1, N}^\varepsilon(t_i), \bar{\omega}_{1, l-1}^\varepsilon(t_i), \bar{\omega}_{l+1, N}^\varepsilon(t_i)) \end{cases}$$

moves like free flow for $\tau \in [0, t_{i+1} - t_i]$. It is possible to construct such sequence because the free flow is well defined and continuous.

Then it is sufficient, in view of the *semigroup property* verified by the marginals, to prove our assumption only for a segment $[0, t_1]$.

To simplify the notation, in the following $(\Delta(\mathbf{z}_N, \bar{\omega}_N))^{(k)}$ will be denoted Δ_k . We will prove the formula only for Δ_1 , the other cases work in the same way (see [PS15] for more details).

Because there is at most one collision in $[0, t_1]$, all the $\mathcal{T}_{1, 1+r}(t)\Delta_{1+r}$ vanish for $r \geq 2$.

If there is no collision, then $\Delta_1(t)$ is just the push-forward of Δ_1 by the free flow with isotropic reflection, and $\mathcal{T}_{1, 2}(t)\Delta_2$ vanishes. So the formula is verified.

If there is one collision, we can assume without loss of generality that it occurs between particles 1 and 2. Then in $\mathcal{T}_{1, 1}(t)\Delta_1$ the two first particles are replaced by virtual ones :

$$\mathcal{T}_{1, 1}(t)\Delta_1 = \frac{1}{N} \left(\delta_{(\tilde{z}_1(t), \bar{\omega}_1)} + \delta_{(\tilde{z}_2(t), \bar{\omega}_2)} + \sum_{i=3}^N \delta_{(z_i(t), \bar{\omega}_i(t))} \right),$$

with $\tilde{z}_i(t) = (x_i - tv_i, v_i)$.

In $\mathcal{T}_{1, 2}(t)\Delta_2$, there are two parts: a first part which corresponds to post collision directions : $\frac{1}{N} (\delta_{z_1(t), \bar{\omega}_1(t)} + \delta_{z_2(t), \bar{\omega}_2(t)})$, and a second corresponding to the negative Dirac mass in the virtual particles : $-\frac{1}{N} (\delta_{(\tilde{z}_1(t), \bar{\omega}_1)} + \delta_{(\tilde{z}_2(t), \bar{\omega}_2)})$, which compensate the previous error.

Finally we get the expected formula. ■

3.4 Boltzmann's hierarchy and *a priori* estimates

3.4.1 Definition of the Boltzmann hierarchy

We want now to describe a formal limit of the BBGKY hierarchy 3.3.5 when ε tends to 0 in the scaling $\varepsilon^2 N = 1$. For $(f_0^s)_s$ a family of symmetric functions on $(\Lambda \times \mathbb{R}^3)^s$, we define the Boltzmann hierarchy and its series expansion (what we call later the *Boltzmann hierarchy*):

$$\begin{aligned} (3.4.1) \quad f^s(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{t_{r-1}} dt_1 \cdots dt_r T_s^0(t-t_1) C_{s, s+1}^0 \cdots C_{s+r-1, s+r}^0 T_{s+r}^0(t_r) f_0^{s+r} \\ &=: \sum_{r=0}^{\infty} Q_{s, s+r}^0(t) f_0^{s+r} \end{aligned}$$

where $T_s^0(t)$ is the semigroup associated to the dynamics of s punctual particles with reflection in angle (and no collision) and $C_{s,s+1}^0$ is the formal collision operator for punctual spheres :

$$(3.4.2) \quad C_{s,s+1}^0 := C_{s,s+1}^{0,+} - C_{s,s+1}^{0,-}$$

$$(3.4.3) \quad C_{s,s+1}^{0,+} f^{s+1}(\mathbf{z}_s) := \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3} f^{s+1}(\dots, x_i, v'_i, \dots, x_i, v'_{s+1}) (\nu \cdot (v_{s+1} - v_i))_+ d\nu dv_{s+1}$$

$$(3.4.4) \quad C_{s,s+1}^{0,-} f^{s+1}(\mathbf{z}_s) := \sum_{i=1}^s \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3} f^{s+1}(\mathbf{z}_s, x_i, v_{s+1}) (\nu \cdot (v_{s+1} - v_i))_- d\nu dv_{s+1}.$$

Remark that for initial data of the form $(f_0^{\otimes s})$, the Boltzmann hierarchy is of the form $(f^{\otimes s}(t))$, where $f(t)$ is solution of :

$$(3.4.5) \quad f(t) = T_1^0(t) f_0 + \int_0^t T_1^0(\tau) C_{1,2}^0 f(\tau)^{\otimes 2} d\tau$$

which is precisely the Boltzmann equation in the integral form.

To properly define this operator, we have to find a nice functional space on which the (f_0^s) will be defined :

Definition 3.4.1

For $\beta > 0$ and μ two constants, we define the Banach space $X_{\beta,\mu}$ such that $(f^s) \in X_{\beta,\mu}$ if and only if for all $s \in \mathbb{N}^*$, f^s is measurable, symmetric, compatible:

$$(3.4.6) \quad \forall s \in \mathbb{N}^*, \forall \mathbf{z}_s \in (\Lambda \times \mathbb{R}^3)^s, f^s(\mathbf{z}_s) = \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^3} f^{s+1}(\mathbf{z}_s, z_{s+1}) dz_{s+1}$$

and

$$(3.4.7) \quad \|(f^s)_s\|_{\beta,\mu} := \sup_{s \in \mathbb{N}^*} \operatorname{esssup}_{\mathbf{z}_s \in (\Lambda \times \mathbb{R}^3)^s} |f^s(\mathbf{z}_s)| \exp\left(\mu s + \frac{\beta}{2} |\mathbf{v}_s|^2\right)$$

is finite, with $|\mathbf{v}_s|^2 = \sum_{i=1}^s |v_i|^2$.

We denote the closed subspace of continuous functions

$$\tilde{X}_{\beta,\mu} := X_{\beta,\mu} \cap \prod_{s \geq 1} \mathcal{C}((\Lambda \times \mathbb{R}^3)^s).$$

Theorem 3.4.1

For $\beta > 0$, μ , there exist $\beta' > 0$, μ' and a time T such that the Boltzmann hierarchy

$$\begin{cases} \tilde{X}_{\beta,\mu} \rightarrow C([0, T], X_{\beta',\mu'}) \\ (f_0^s)_s \mapsto (f^s(t))_s \end{cases}$$

is continuous.

The rest of this section is devoted to the proof of the theorem.

In a first time we will prove that $Q_{s,s+r}^0(t) f_0^{s+r}$ is well defined if (f_0^s) is in $\tilde{X}_{\beta,\mu}$. Then the continuity estimates of [GSRT13] and [Lan75] show that the sum is well defined and continuous.

3.4.2 Well-posedness of the operators $Q_{s,s+r}^0(t)$

The main difficulty is that the transport semigroup $T_1^0(t)$ does not send continuous functions onto continuous functions: discontinuities will appear in the future of $\{0\}_t \times \partial\Lambda \times \mathbb{R}^3$. Thus we have to check that we can apply $C_{s,s+1}^0$ on the function $T_{s+1}^0(t)f_0^{s+1}$.

We will restrict ourselves to the case where $f_0^s = g_1 \otimes \cdots \otimes g_s$. We define the *future set* $\mathcal{F}(t) \subset \mathbb{R}^+ \times \Lambda \times \mathbb{R}^3$ as

$$(3.4.8) \quad \mathcal{F}(t) := \{(\tau, x, v) | x - (\tau - t)v \in \partial\Lambda, \tau \geq t\}$$

and $\mathcal{F}(t) \cap \{t = 0\} := \{(x, v) \in \mathbb{R}^3, (0, x, v) \in \mathcal{F}(t)\}$

Then we have the following lemma, equivalent to a "weak" propagation of continuity:

Lemma 3.4.2

Let g be a measurable function on $\Lambda \times \mathbb{R}^3$, continuous outside $(\mathcal{F}(t_1) \cup \cdots \cup \mathcal{F}(t_r)) \cap \{t = 0\}$ for $(t_1, \dots, t_r) \in (\mathbb{R}_+^*)^s$ and dominated by $e^{-\beta|v|^2/2}$ for some $\beta > 0$. Then $T_1^0 g : (t, x, v) \mapsto (T_1^0(t)g)(x, v)$ is continuous outside $\mathcal{F}(0) \cup \mathcal{F}(t_1) \cup \cdots \cup \mathcal{F}(t_r)$ and dominated by $e^{-\beta|v|^2/2}$.

Proof : We will show that the trace of $T_1^0 g$ on $\Sigma^+ := \{(x, v) \in \partial\Lambda \times \mathbb{R}^3, v \cdot n(x) < 0\}$ is continuous. In the following we will denote $t_0 := 0$.

We define the function g_b on $\mathbb{R}^+ \times \Sigma^+$ by :

$$g_b(t, x, v) := \int_{\mathbb{S}^2} g(x - t|v|\omega, |v|\omega)(\omega \cdot n(x))_+ c_3 d\omega$$

with g extended by 0 outside Λ . A particle reflected with velocity $|v|\omega$ crosses the domain in time $1/|\omega \cdot \vec{e}_1||v|$ and g is continuous outside $(\mathcal{F}(0) \cup \mathcal{F}(t_1) \cup \cdots \cup \mathcal{F}(t_r)) \cap \{t = 0\}$. Thus the function $\omega \mapsto g(x - t|v|\omega, |v|\omega)$ is continuous outside the set of directions ω such that the particle meets the boundary at time t_i for some i :

$$\bigcup_{i=0}^r \left\{ \omega \in \mathbb{S}^2, \frac{1}{|\omega \cdot \vec{e}_1||v|} = (t - t_i) \right\}$$

which is of zero measure in \mathbb{S}^2 . Thus g_b is continuous on $\mathbb{R}^+ \times \Sigma^+$. Now we define the operator $B : C(\mathbb{R}^+ \times \Sigma^+) \rightarrow C(\mathbb{R}^+ \times \Sigma^+)$ which associates to f its image by the free flow after one more reflection:

$$Bf(t, x, v) := \int_{\mathbb{S}^2} f\left(t - \frac{1}{|\omega \cdot \vec{e}_1||v|}, x - \frac{\omega}{|\omega \cdot \vec{e}_1|}, |v|\omega\right) (n(x) \cdot \omega)_+ c_3 d\omega,$$

where f is extended by 0 for $t < 0$. Using the same argument than for g_b , Bf is continuous.

Applying the formula 3.3.2 in the case of one particle, we obtain that the trace of $T_1^0 g$ on $\mathbb{R}^+ \times \Sigma^+$ is

$$(3.4.9) \quad g_t := \sum_{i=0}^{\infty} B^i g_b.$$

We have to show that this sum converges normally on every compact set. In fact the sum is locally finite:

Lemma 3.4.3

For $(x, v) \in \Lambda \times \mathbb{R}^3$, the one particle process has at most $t|v|$ reflections.

Proof : To have N reflections, a particle has to travel at least a distance N , so $N \leq t|v|$. ■

From this bound we deduce that the series 3.4.9 is finite on every compact set, and so g_t is continuous. $T_1 g$ is solution of the problem:

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0 \\ f|_{\{0\} \times \Lambda \times \mathbb{R}^3} = g \\ f|_{\mathbb{R}_+ \times \Sigma^+} = g_t \end{cases}$$

where we fix all the boundary condition. Because g is continuous outside $(\mathcal{F}(t_1) \cup \dots \cup \mathcal{F}(t_r)) \cap \{t = 0\}$ and g_t is continuous outside $\mathcal{F}(t_1) \cup \dots \cup \mathcal{F}(t_r)$, $T_1^0 g$ is continuous outside $\mathcal{F}(t_0) \cup \dots \cup \mathcal{F}(t_r)$.

The bound follows from maximum principle. ■

Let f_1, \dots, f_s be measurable functions, continuous outside $\mathcal{F}(t_1) \cup \dots \cup \mathcal{F}(t_r)$ and dominated by $Ae^{-\beta|v|^2/2}$ for some $A > 0$. Then $T_s^0(t)(f_1 \otimes \dots \otimes f_s)$ is equal to $(T_1^0(t)f_1) \otimes \dots \otimes (T_1^0(t)f_s)$ and

$$C_{s-1,s}^0(f_1 \otimes \dots \otimes f_s) = \sum_{i=1}^{s-1} f_1 \otimes \dots \otimes C_{1,2}^0(f_i \otimes f_s) \otimes \dots \otimes f_{s-1}.$$

If we fix t and x , f_i has a discontinuity for $v \in \bigcup_{i=1}^r \{u \in \mathbb{R}^3, (t, x, u) \in \mathcal{F}(t_i)\}$ the set of velocities such that the particles meet the boundary at time t_i , which is a union of planes of dimension 2. Using the "Carleman's collision parametrization" (see Appendix 3.A),

$$\begin{aligned} C_{1,2}^0 f_1 \otimes f_2(t, x, v) &:= -f_1(t, x, v) \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2} f_2(t, x, v_*) ((v - v_*) \cdot \sigma)_- dv_* d\sigma \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} f_1(t, x, v') f_2(t, x, v'_*) ((v - v_*) \cdot \sigma)_- dv_* d\sigma \\ &:= -f_1(t, x, v) \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2} f_2(t, x, v_*) ((v - v_*) \cdot \sigma)_- dv_* d\sigma \\ &\quad + \int_{\{(v', v'_*) \in \mathbb{R}^6, (v' - v) \cdot (v'_* - v) = 0\}} f_1(t, x, v') f_2(t, x, v'_*) dv' dS(v'_*) \end{aligned}$$

where $dS(v'_*)$ is the Lebesgue measure on the affine plane $\{v'_* \in \mathbb{R}^3, (v' - v) \cdot (v'_* - v) = 0\}$. In the first term of the sum, we integrate f_2 on a space of dimension 3, so the set of discontinuity is of zero measure, so the first term is continuous outside $\mathcal{F}(t_1) \cup \dots \cup \mathcal{F}(t_r)$. For the second term, because we integrate v' on the full space, for almost all v' , $f_1(t, x, \cdot)$ is continuous at v' and v'_* lives in a plane transverse to the set of discontinuities of $f_2(t, x, \cdot)$. Thus $f_1(t, x, v') f_2(t, x, v'_*)$ is integrable and the second term is continuous.

In addition we have the following bound:

$$\begin{aligned} (3.4.10) \quad & \left| C_{1,2}^0 f_1 \otimes f_2(t, x, v) \right| \\ & \leq A^2 \int \left(e^{-\frac{\beta(|v|^2 + |v_*|^2)}{2}} + e^{-\frac{\beta(|v'|^2 + |v'_*|^2)}{2}} \right) ((v - v_*) \cdot \sigma)_- d\sigma dv_* \\ & \leq CA^2 \int e^{-\frac{\beta(|v|^2 + |v_*|^2)}{2}} (|v| + |v_*|) dv_* \\ & \leq A^2 C \beta^{-3/2} (\beta^{-1/2} + |v|) e^{-\beta|v|^2/2} \end{aligned}$$

for some constant A . Then for all $\beta' < \beta$, we can bound $C_{1,2}^0 f_1 \otimes f_2$ by $\tilde{C}e^{-\beta'|v|^2/2}$. Finally we always have integrability with respect to v .

To summarize, if f_1, \dots, f_{s+1} are measurable functions, continuous outside $(\mathcal{F}(t_1) \cup \dots \cup \mathcal{F}(t_r)) \cap \{t = 0\}$ and dominated by $Ce^{-\beta|v|^2/2}$, then

$$C_{s,s+1}^0 T_{s+1}^0(t)(f_1 \otimes \dots \otimes f_{s+1}) = \sum_{i=1}^s f_1^i \otimes \dots \otimes f_s^i$$

where the $(f_j^i)_{i,j}$ are continuous outside $\mathcal{F}(0) \cup \mathcal{F}(t_1) \cup \dots \cup \mathcal{F}(t_r)$ and dominated by $\tilde{C}e^{-\beta'|v|^2/2}$ for all $\beta' < \beta$.

Iterating the process

$$(t_{s+1}, \dots, t_{s+r}) \mapsto T_s^0(t - t_{s+1}) C_{s,s+1}^0 \dots C_{s+r-1,s+r}^0 T_{s+r}^0(t_{s+r}) f^{\otimes(s+r)}$$

is equal to $\sum_i f_1^i \otimes \dots \otimes f_s^i$ where the $(f_j^i)_{i,j}$ are continuous outside $\mathcal{F}(0) \cup \mathcal{F}(t_{s+1}) \cup \dots \cup \mathcal{F}(t_{s+r})$. Fixing $(t, \mathbf{x}_s, \mathbf{v}_s)$, outside a finite number of $(t_{s+1}, \dots, t_{s+r})$, the f_j^i are continuous near $\{(t_m, x_n, v_n), 1 \leq m \leq r, 1 \leq n \leq s\}$. By integrating we get that $Q_{s,s+r}^0(t) f^{\otimes(s+r)}$ is well defined on $(\Lambda \times \mathbb{R}^3)^s$ and continuous outside $\mathcal{F}(0)$.

Remark 3.4.1

Note that if f_0 verifies the boundary condition

$$(3.4.11) \quad \forall (x, v) \in \Sigma^+, f_0(x, v) = \int_{\mathbb{S}^2} f_0(x, \omega|v|) c_3(\Gamma(x)\omega \cdot \vec{\mathbf{e}}_1)_- d\omega,$$

$T_1^0 f_0$ is continuous, and then $Q_{1,r}^0 f_0$ is always continuous. Finally we get:

Proposition 3.4.4

Let f_0 be a continuous function on $\Lambda \times \mathbb{R}^3$, bounded by a Gaussian distribution and satisfying the condition 3.4.11. Then the solution $f(t)$ of the Boltzmann equation with isotropic reflection is continuous.

3.4.3 Continuity estimates

Proposition 3.4.5

There is a constant C independent of β , μ and $r \in \mathbb{N}$ such that

$$(3.4.12) \quad \|Q_{s,s+r}^0(t) f_0^{s+r}\|_{3\beta/4, \mu-1} \leq (C\beta^{-2}e^{-\mu t})^r \|f_{s+r}^0\|_{\beta, \mu},$$

$$(3.4.13) \quad \|Q_{s,s+r}^\varepsilon(t) f_{0,N}^{(s+r)}\|_{3\beta/4, \mu-1} \leq (C\beta^{-2}e^{-\mu t})^r \|f_{0,N}^{(s)}\|_{\beta, \mu}.$$

Proof : We suppose f_0^{s+1} dominated by $\exp(-\beta|\mathbf{v}_{s+1}|^2/2)$.

Because $\exp(-\beta|\mathbf{v}_s|^2/2)$ is preserved by $T_s^0(t)$ for all $\beta > 0$, using the bound 3.4.10,

$$\begin{aligned}
& |C_{s,s+1}T_{s+1}(t)f_0^{s+1}(\mathbf{z}_{s+1})| \\
& \leq C\beta^{-3/2} \left(s\beta^{-1/2} + \sum_{i=1}^s |v_i| \right) e^{-\frac{\beta}{2}|\mathbf{v}_s|^2} \\
& \leq C\beta^{-3/2} \left(s\beta^{-1/2} + \left(\sum_{i=1}^s |v_i| \right) e^{-(\beta-\beta')|\mathbf{v}_s|^2} \right) e^{-\frac{\beta'}{2}|\mathbf{v}_s|^2} \\
& \leq C\beta^{-3/2} \left(s\beta^{-1/2} + \frac{s^{1/2}}{(\beta-\beta')^{1/2}} ((\beta-\beta')|\mathbf{v}_s|^2)^{1/2} e^{-\frac{\beta-\beta'}{2}|\mathbf{v}_s|^2} \right) e^{-\frac{\beta'}{2}|\mathbf{v}_s|^2} \\
& \leq C\beta^{3/2} \left(s\beta^{-1/2} + \frac{s^{1/2}}{(\beta-\beta')^{1/2}} \right) e^{-\frac{\beta'}{2}|\mathbf{v}_s|^2}
\end{aligned}$$

using the Cauchy-Schwartz inequality between lines 3 and 4. Then iterating this bound and integrating on $t > t_1 > \dots > t_r > 0$, we get that for $\|(f_0^s)\|_{\beta,\mu} \leq 1$

$$\begin{aligned}
& |Q_{s,s+r}^0(t)f_0^{s+r}(\mathbf{z}_s)| \\
& \leq \frac{t^r}{r!} \prod_{i=0}^{r-1} C\beta_{i+1}^{-3/2} \left((s+i)\beta_{i+1}^{-1/2} + (s+i)^{1/2}(\beta_{i+1}-\beta_i)^{-1/2} \right) e^{-\frac{3\beta}{8}|\mathbf{v}_s|^2 - \mu(r+s)}
\end{aligned}$$

for $\beta = \beta_r > \dots > \beta_0 = 3\beta/4$. For $\beta_{i+1} - \beta_i = \beta/4r$, we get :

$$\begin{aligned}
|Q_{s,s+r}^0(t)f_0^{s+r}(\mathbf{z}_s)| & \leq \frac{t^r(s+r)^r}{r!} (C\beta^{-2})^r e^{-\frac{3\beta}{8}|\mathbf{v}_s|^2 - \mu(r+s)} \\
& \leq t^r e^{r+s} (C\beta^{-2})^r e^{-\frac{3\beta}{8}|\mathbf{v}_s|^2 - s\mu} e^{-\mu r}
\end{aligned}$$

using the Stirling's formula. This is the expected estimate.

The same method works for $Q_{s,s+r}^\varepsilon(t)$. ■

We can sum these bounds and get

$$\|f^s(t)\|_{3\beta/4,\mu-1} \leq \frac{1}{1 - C\beta^{-2}e^{-\mu t}} \|(f_0^s)\|_{\beta,\mu}$$

which concludes the proof of Theorem 3.4.1. ■

3.5 Main theorem

The main theorem of the paper is a weak convergence result. Indeed we will only look at the convergence of *observables* of the system, *i.e.* averaging with respect to the momentum variable. In addition, the marginals of the hard sphere system are only well defined in $\mathcal{D}_\varepsilon^s$, so convergence will occur only away from the diagonal of the physical space. To summarize all these conditions, we define the following notion of convergence:

Definition 3.5.1

A sequence $(f_N^s)_{1 \leq s \leq N}$ converges to a sequence $(f^s)_s$ in average and locally uniformly off the diagonal if for all $\varphi_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, continuous with polynomial growth at infinity, and for all compact sets $K \subset \Lambda^s$, away from the diagonal set $\mathcal{D}^s :=$

$$(3.5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{x}_s \in \Lambda^s \mid \exists i, j, x_i = x_j\} \\ I_{\varphi_s}(f_N^s - f^s)(\mathbf{x}_s) := \int_{(\mathbb{R}^3)^s} (f_N^s - f^s)(\mathbf{z}_s) \varphi_s(\mathbf{v}_s) d\mathbf{v}_s \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \text{ in } L^\infty(K). \end{array} \right.$$

Theorem 3.5.1

Let $\beta > 0$ and μ be two constants. Then there exists a time T such that the following holds. Let $(f_0^s)_s$ be an element of $\tilde{X}_{\beta, \mu}$ and $(W_{0, N})_N$ a sequence of symmetric functions in $L^1 \cap L^\infty(\mathcal{D}_{1/\sqrt{N}}^N)$ with $(f_{0, N}^{(s)})_{1 \leq s \leq N}$ their marginals. Then if $(f_{0, N}^{(s)})$ converge to (f_0^s) as $N \rightarrow \infty$ in norm $\|\cdot\|_{\beta, \mu}$, the sequence $(f_N^s(t))_s$ solution to the BBGKY hierarchy converges in average locally uniformly to $(f^s(t))_s$ the solution of the Boltzmann hierarchy with initial data $(f_0^s), \forall t < T$.

Remark 3.5.1

Note that the convergence of the observables is uniform for $s = 1$.

Proof : As for the interacting case, we rewrite $Q_{s, s+r}^0(t)$ with a characteristic formula. As in the case of interacting particles we construct for $s, r \in \mathbb{N}$ the pseudotrajectory

$$\zeta_{s, s+r}^0(\tau, t, \mathbf{z}_s, (\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}, a, \boldsymbol{\sigma})$$

where :

- $(a, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathfrak{A}_s^{s+r} \times \{\pm 1\}^r$,
- $\tau \in [0, t]$,
- $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r} := (t_i, \nu_i, \bar{v}_i)_{s < i \leq s+r} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3)^r$ with $t > t_{s+1} \cdots > t_{s+r} > 0$,
- $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s} = (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{r+s}) \in \Omega^{r+s}$.

The number of particles of $\zeta_{s, s+r}^0(\tau)$ is $s + k$ for τ between t_k and t_{k+1} and $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}^0(\tau)$ the evolution of the reflection parameters. We define $(\zeta_{s, s+r}^0(\tau), \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}^0(\tau))$ by

- $(\zeta_{s, s+r}^0, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}^0)(t) := (\mathbf{z}_s, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r})$,
- for $\tau \in (t_{k+1}, t_k), \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}^0 k + 1, s + r(\tau)$ is constant and $(\zeta_{s, s+r}^0(\tau), \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}^0(\tau))$ follow the hard sphere backward flow described at section 3.2.1,
- at time t_k^+ , a particle is added at position $x_k^0(t_k) = x_{a(k)}^0(t_k)$ and velocity \bar{v}_k . If $\sigma = 1$, we have $(\bar{v}_k - v_{a(k)}(t_k^+)) \cdot \nu_k > 0$ and we apply the scattering of velocities. Else if $\sigma_k = -1$, we do not apply scattering.

We denote $\mathcal{G}^0(\mathbf{z}_s, t, a, \boldsymbol{\sigma})$ the set of coordinates, *i.e.* the $((\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s})$ such that the pseudo-trajectory follows the collision parameters $(a, \boldsymbol{\sigma})$, and

$$\begin{aligned} d\Lambda_{a, \boldsymbol{\sigma}}^0((\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}) \\ = \left(\prod_{k=s+1}^{s+r} \left[\sigma_k \nu_k \cdot (\bar{v}_k - v_{a(k)}^0(t_k^+)) \right]_+ dt_k d\bar{v}_k d\nu_k \right) d\mathbb{P}^{s+r}(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}). \end{aligned}$$

Then we can rewrite $Q_{s, s+r}^0(t) f^{s+r}(\mathbf{z}_s)$ as

$$(3.5.2) \quad \begin{aligned} & Q_{s, s+r}^0(t) f^{s+r}(\mathbf{z}_s) \\ & := \sum_{a, \boldsymbol{\sigma}} \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{s+r} \int_{\mathcal{G}^0(\mathbf{z}_s, t, a, \boldsymbol{\sigma}_r)} d\Lambda_{a, \boldsymbol{\sigma}_r}^0((\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}) f_0^{s+r}(\zeta^0(0)). \end{aligned}$$

We shall prove the one-to-one convergence

$$I_{\varphi_s} \left(\int_{\mathcal{G}^\varepsilon(\mathbf{z}_s, t, a, \boldsymbol{\sigma})} d\Lambda_{a, \boldsymbol{\sigma}}^\varepsilon f_{0, N}^{(s+r)}(\zeta^\varepsilon(0)) \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} I_{\varphi_s} \left(\int_{\mathcal{G}^0(\mathbf{z}_s, t, a, \boldsymbol{\sigma})} d\Lambda_{a, \boldsymbol{\sigma}}^0 f_0^{s+r}(\zeta^0(0)) \right)$$

at all points (t, \mathbf{x}_s) and all collision parameters $(a, \boldsymbol{\sigma}_r)$, using that the pseudotrajectories ζ^ε and ζ^0 are in average not so far. There are two reasons producing a big error between the two trajectories. The first one is the *recollisions* (collision of two particles that have already been created) that can occur for the interacting process but not for the punctual particles. The second comes from the difference between $\bar{\omega}^\varepsilon(0)$ and $\bar{\omega}^0(0)$: because there is a shift between $\zeta^0(\tau)$ and $\zeta^\varepsilon(\tau)$, the times of reflection are not exactly the same. Thus there exists a set of times during which $\omega^\varepsilon(\tau)$ is different from $\omega^0(\tau)$. If 0 is in this set the final velocity will be very different.

To make the convergence term by term work, we have to perform some truncation. First we note that the continuity bound gives

$$(3.5.3) \quad \mathcal{R}_1 := \left| \sum_{r=0}^{N-s} Q_{s,s+r}^\varepsilon (f_{0,N}^{(s+r)} - f_0^{s+r}) \right| \leq C_{\beta,\mu} e^{-\frac{3\beta}{8}|\mathbf{v}_s|^2 - (\mu-1)s} \left\| \left(f_{0,N}^{(s+r)} - f_0^{s+r} \right)_{1 \leq s \leq N} \right\|_{\beta,\mu}$$

and we have to look only at the semigroups applied to $(f_0^s)_s$.

Then we have to bound the number of creations of particles by an integer R that depends on N . The rest will be bounded by :

$$(3.5.4) \quad \mathcal{R}_2 := \left| \sum_{r>R} Q_{s,s+r}^0(t) f_0^{s+r} \right| \leq \sum_{r>R} (C_{\beta,\mu} t)^r e^{-\frac{3\beta}{8}|\mathbf{v}_s|^2 - (\mu-1)s} \|(f_0^s)_s\|_{\beta,\mu} \leq C 2^{-R} e^{-\frac{3\beta}{8}|\mathbf{v}_s|^2 - (\mu-1)s} \|(f_0^s)_s\|_{\beta,\mu}$$

for $t \leq 1/(2C_{\beta,\mu}) =: T$. The same estimates hold for the BBGKY hierarchy.

Next we have to cut the high energy. Because $(f_0^s)_s$ is bounded in $X_{\beta,\mu}$, $(f_0^s \mathbb{1}_{|\mathbf{v}_i|^2 > E})_s$ is bounded in $X_{7\beta/8,\mu}$ by $e^{-7\beta E/16} \|(f_0^s)_s\|_{\beta,\mu}$. Thus we have the bound (the same bound holds for BBGKY)

$$(3.5.5) \quad \mathcal{R}_3 := \left| \sum_{r \geq 0} Q_{s,s+r}^0(t) (f_0^{s+r} \mathbb{1}_{|\mathbf{v}_{s+r}|^2 > E}) \right| \leq C e^{-\beta E/16} e^{-\frac{3\beta}{8}|\mathbf{v}_s|^2 - (\mu-1)s} \|(f_0^s)_s\|_{\beta,\mu}.$$

Thus for any $\eta > 0$ we can fix R, E and N_0 such that for $N > N_0$,

$$\|\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3\|_{3\beta/4, \mu-1} \leq \eta.$$

From this $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3$ converges to zero in the sense of Definition 3.5.1 when R, E and N_0 tend to infinity, uniformly in ε .

Therefore the proof is reduced to the proof of the following proposition:

Proposition 3.5.2 (Term by term convergence)

For all compact sets $K \subset \Lambda^s \setminus \mathfrak{D}_s$, all collision parameters $(a, \boldsymbol{\sigma})$ and all test functions φ_s ,

$$(3.5.6) \quad \int_{\mathbb{G}^\varepsilon(t, \mathbf{x}_s, a, \boldsymbol{\sigma}, E)} d\mathbf{v}_s d\Lambda_{a, \boldsymbol{\sigma}}^\varepsilon f_0^{s+r}(\zeta^\varepsilon(0)) \varphi_s(\mathbf{v}_s) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{G}^0(t, \mathbf{x}_s, a, \boldsymbol{\sigma}, E)} d\mathbf{v}_s d\Lambda_{a, \boldsymbol{\sigma}}^0 f_0^{s+r}(\zeta^0(0)) \varphi_s(\mathbf{v}_s)$$

uniformly on $[0, T] \times K$, where $\mathbb{G}^\varepsilon(t, \mathbf{x}_s, a, \boldsymbol{\sigma}, E)$ is the set of parameters

$$\left\{ (\mathbf{v}_s, (\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}), \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^{3s}, \right. \\ \left. ((\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}) \in \mathcal{G}^\varepsilon(t, \mathbf{x}_s, \mathbf{v}_s, a, \boldsymbol{\sigma}), |\mathbf{v}_s|^2 + |\bar{\mathbf{v}}_{s+1, s+r}|^2 \leq E \right\},$$

and same definition for $\mathbb{G}^0(t, \mathbf{x}_s, a, \boldsymbol{\sigma}, E)$.

■

3.6 Proof of the term by term convergence

We fix collision parameters $(a, \boldsymbol{\sigma})$ and a compact set $K \in \Lambda^s \setminus \mathfrak{D}^s$. In order to prove 3.5.6, we compare the two pseudotrajectories. Fixed an initial position \mathbf{x}_s at time t , we need to know the first difference between hard spheres and punctual process (going backward from time t to 0). We can construct four bad sets $\mathcal{P}_1(\varepsilon)$, $\mathcal{P}_2(\varepsilon)$, $\mathcal{P}'_2(\varepsilon)$ and $\mathcal{P}_3(\varepsilon)$ such that

- for $(\mathbf{v}_s, (\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}) \in \mathcal{P}_1(\varepsilon)$, there is first a *shift*, i.e. there is a $i \in \{s+1, \dots, s+r\}$ such that $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}^0(t_i) \neq \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}^\varepsilon(t_i)$ and there is no recollision during (t_i, t) (recall that $t_{s+r} = 0$),
- for $(\mathbf{v}_s, (\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}) \in \mathcal{P}_2(\varepsilon)$, the hard sphere process has first a recollision, i.e. there is a first recollision at time τ and no shift during (τ, t) ,
- for $(\mathbf{v}_s, (\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}) \in \mathcal{P}'_2(\varepsilon)$, the punctual process has first an *overlap*, i.e. two particles reach a distance less than ε at some time τ (with an exception for particles i and $a(i)$ just after t_i),
- for $(\mathbf{v}_s, (\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}) \in \mathcal{P}_3(\varepsilon)$, there is some $i \in \{s+1, \dots, s+r\}$ such that $x_{a(i)}^\varepsilon(t_i)$ is at distance less than 2ε from the boundary or from any other particle, and $\mathcal{P}_3(\varepsilon) \cap (\mathcal{P}_1(\varepsilon) \cup \mathcal{P}_2(\varepsilon) \cup \mathcal{P}'_2(\varepsilon)) = \emptyset$.

Note that $\mathbb{G}^\varepsilon \setminus (\mathcal{P}_1(\varepsilon) \cup \mathcal{P}_2(\varepsilon) \cup \mathcal{P}'_2(\varepsilon) \cup \mathcal{P}_3(\varepsilon)) = \mathbb{G}^0 \setminus (\mathcal{P}_1(\varepsilon) \cup \mathcal{P}_2(\varepsilon) \cup \mathcal{P}'_2(\varepsilon) \cup \mathcal{P}_3(\varepsilon))$. Indeed outside \mathcal{P}_3 , all relative positions ν_i are allowed at creation i , and outside $\mathcal{P}_1(\varepsilon) \cup \mathcal{P}_2(\varepsilon) \cup \mathcal{P}'_2(\varepsilon)$ the velocities of the incoming particles at the reflections are the same in hard sphere and punctual backward pseudotrajectories.

In the following we will need to integrate on the collision parameters, we then introduce the following useful terminology. The particle $a(i)$ is *deviated* by the creation $i \in \{s+1, \dots, s+r\}$ if σ_i is positive. In that case there is a scattering of the velocity. The particle i is by definition deviated by the creation i . We recall that we look at backward trajectories and we follow time in the inverse sense.

3.6.1 Continuity estimates of the two pseudotrajectories

We begin by a continuity estimate for the process involving one particle.

Lemma 3.6.1

Let $(x^0, \tilde{x}^0) \in \Lambda^2$, $v \in B(E^{1/2})$ (the ball in \mathbb{R}^3 of diameter $E^{1/2}$) and $\bar{\boldsymbol{\omega}}_2^0 \in \Omega^2$. For any collision parameters $(v_*, \nu) \in \mathbb{S}^2 \times B(E^{1/2})$, we define two 2-punctual particles backward processes $(\mathbf{z}_2(\tau), \bar{\boldsymbol{\omega}}_2(\tau))$ and $(\tilde{\mathbf{z}}_2(\tau), \tilde{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_2(\tau))$ for $\tau \in (0, t)$, with initial data at $\tau = t$

- $(x^0, v, x^0, v_*, \bar{\boldsymbol{\omega}}_2)$ (respectively $(x^0, v, x^0 + \varepsilon\nu, v_*, \bar{\boldsymbol{\omega}}_2^0)$) if $(v - v_*) \cdot \nu < 0$,
- $(x^0, v', x^0, v'_*, \bar{\boldsymbol{\omega}}_2^0)$ (respectively $(x^0, v', x^0 + \varepsilon\nu, v'_*, \bar{\boldsymbol{\omega}}_2^0)$) if $(v - v_*) \cdot \nu > 0$, with (v', v'_*) given by the scattering rule 3.2.4.

Then if the particle $i \in \{1, 2\}$ is deviated by the creation, there exists a constant $C > 0$

such that for $\tau \in (0, t)$

$$(3.6.1) \quad \int_{B(E^{1/2}) \times \mathbb{S}^2} |x_i(\tau) - \tilde{x}_i(\tau)| \mathbb{1}_{\bar{\omega}_i(\tau) = \tilde{\omega}_i(\tau)} |\nu \cdot (v - v_*)| dv_* d\nu \leq CE^{5/2} (\varepsilon + |x_0 - \tilde{x}_0|) |\log(\varepsilon + |x_0 - \tilde{x}_0|)|.$$

Proof : Fix (v_*, ν) and denote τ_k (respectively $\tau_k + \delta\tau_k$) the time of the k -th reflection of the particle z_i (respectively the particle \tilde{z}_i). For $k \geq 1$, because between their k -th and $(k+1)$ -th reflections the two particles have the same velocity and the two sides of $\partial\Lambda$ are parallel,

$$(x_i(\tau_k), x_i(\tau_{k+1}), \tilde{x}_i(\tau_{k+1} + \delta\tau_{k+1}), \tilde{x}_i(\tau_k + \delta\tau_k))$$

forms a parallelogram. Hence $\delta\tau_k$ and $(\tilde{x}_i(\tau_k + \delta\tau_k) - x_i(\tau_k))$ do not depend on k (we denote them $\delta\tau$ and δx).

Because we suppose that there is no shift at time τ , z_i and \tilde{z}_i have the same number of reflections. If there is no reflection, $|x_i(\tau) - \tilde{x}_i(\tau)|$ is constant. If there are $k \geq 1$ reflections, we can suppose that $\delta\tau > 0$ and

$$\begin{aligned} |x_i(\tau) - \tilde{x}_i(\tau)| &= |x_i(\tau_k) - \tilde{x}_i(\tau_k)| \\ &\leq |x_i(\tau_k) - \tilde{x}_i(\tau_k + \delta\tau)| + |\tilde{x}_i(\tau_k + \delta\tau) - \tilde{x}_i(\tau_k)| \\ &\leq |\delta x| + E^{1/2} |\delta\tau|. \end{aligned}$$

We can treat similarly the case $\delta\tau < 0$.

Because the two trajectories are parallel before the first reflection,

$$\delta\tau = (|x_i(0) - \tilde{x}_i(0)| \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) / (v_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) \text{ and } |\delta x| \leq \frac{|v_i|}{|v_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_1|} |x_i(0) - \tilde{x}_i(0)|.$$

Thus if $\bar{\omega}_i(\tau) = \tilde{\omega}_i(\tau)$,

$$|x_i(\tau) - \tilde{x}_i(\tau)| \leq |x_i(0) - \tilde{x}_i(0)| \left(1 + \frac{2E^{1/2}}{|v_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_1|} \right) \leq (|x_0 - \tilde{x}_0| + \varepsilon) \frac{3E^{1/2}}{|v_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_1|},$$

and it is also bounded by some constant C_Λ because Λ is compact. Because the particle i is deviated, we can integrate on the scattering: using estimation 3.A.3 (Appendix 3.A)

$$\begin{aligned} &\int_{B(E^{1/2}) \times \mathbb{S}^2} |x_i(\tau) - \tilde{x}_i(\tau)| \mathbb{1}_{\bar{\omega}_i(\tau) = \tilde{\omega}_i(\tau)} |\nu \cdot (v - v_*)| dv_* d\nu \\ &\leq \int_{B(E^{1/2}) \times \mathbb{S}^2} \left(\frac{3E^{1/2} (|x_0 - \tilde{x}_0| + \varepsilon)}{|v_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_1|} \wedge C_\Lambda \right) |\nu \cdot (v - v_*)| dv_* d\nu \\ &\leq CE^{5/2} (|x_0 - \tilde{x}_0| + \varepsilon) \log(|x_0 - \tilde{x}_0| + \varepsilon). \end{aligned}$$

■

Fix (t_{s+1}, \dots) . Let $\tau \in [0, t] \setminus \{t_i, s < i < s+r\}$. If there is no recollision nor overlap and if $\bar{\omega}^\varepsilon(\hat{t}) = \bar{\omega}^0(\hat{t})$ for $\hat{t} \in \mathfrak{T}(\tau) := \{\tau\} \cup \{t_i, t_i > \tau\}$, then by an iteration argument $v_k^0(\tau) = v_k^\varepsilon(\tau)$ (in the following denoted $v_k(\tau)$). Fixing $\mathbf{x}_s, \mathbf{v}_s, \mathbf{t}_{s+1, s+r}$ and $\bar{\omega}_{s+r}$, we can then iterate the previous estimates and obtain

Proposition 3.6.2

For $k \in \{1, \dots, r\}$, $\tau \in [t_{k+1}, t_k)$ and $i \in \{1, \dots, s+k\}$ fixed, we have that:

$$(3.6.2) \quad \int_{B_k(E^{1/2}) \times (\mathbb{S}^2)^k} \mathbb{1}_{\text{no recollision}} \mathbb{1}_{\bar{\omega}^\varepsilon(\hat{t}) = \bar{\omega}^0(\hat{t}), \hat{t} \in \mathfrak{T}(\tau)} |x_i^0(\tau) - x_i^\varepsilon(\tau)| \times \prod_{l=s+1}^{s+k} |\nu_l \cdot (\bar{v}_l - v_{a(l)}(t_l^+))| d\nu_l d\bar{v}_l \leq \varepsilon k \left(CE^{5/2} |\log \varepsilon| \right)^k$$

for B_k the ball on \mathbb{R}^{3k} .

Proof : Note that $B_k(E^{1/2}) \subset (B_1(E^{1/2}))^k$, thus we will replace the first set by the second one.

In the following \tilde{i} will indicate the following pseudoparticle: \tilde{i} is equal to i from time τ to time t_i . Then \tilde{i} becomes $a(i)$ until time $t_{a(i)}$, etc until t . We can suppose that every creation deviates \tilde{i} . Else it does not influence $|x_i^0(\tau) - x_i^\varepsilon(\tau)|$ and we can count it as a factor CE^2 .

We want to prove recursively for $m \in \{1, \dots, k\}$

$$(3.6.3) \quad \int_{(B(E^{1/2}) \times \mathbb{S}^2)^m} \mathbb{1}_{\text{no recollision}} \mathbb{1}_{\substack{\bar{\omega}^\varepsilon(\tilde{i}) = \bar{\omega}^0(\tilde{i}), \\ \tilde{i} \in \mathfrak{I}(\tau)}} |x_i^0(\tau) - x_i^\varepsilon(\tau)| \\ \times \prod_{l=s+k+1-m}^{s+k} |\nu_l \cdot (\bar{v}_l - v_{a(l)}(t_l^+))| d\nu_l d\bar{v}_l \\ \leq (CE^{5/2})^m |\log \varepsilon|^{m-1} [(m-1)\varepsilon + \eta(|x_i^0(t_{s+k+1-m}^+) - x_i^\varepsilon(t_{s+k+1-m}^+)| + \varepsilon)]$$

for $\eta(x) = x|\log(x)|$. The initialization is provided by the previous lemma. To prove the induction, as in the previous lemma

$$|x_i^0(t_{s+k+1-m}^+) - x_i^\varepsilon(t_{s+k+1-m}^+)| \\ \leq \left(|x_i^0(t_{s+k-m}^-) - x_i^\varepsilon(t_{s+k-m}^-)| \frac{3E^{1/2}}{|v_i(t_{s+k-m}^-) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1|} \right) \wedge C_\Lambda.$$

Thus $(|x_i^0(t_{s+k+1-m}^+) - x_i^\varepsilon(t_{s+k+1-m}^+)| + \varepsilon)$ stays between ε and $C_\Lambda + \varepsilon$ and its log is smaller than $\sup(|\log \varepsilon|, |\log C_\Lambda + \varepsilon|) = |\log \varepsilon|$. Hence the left hand side of 3.6.3 is bounded by

$$(CE^{5/2})^m |\log \varepsilon|^m \left[m\varepsilon + \left(|x_i^0(t_{s+k-m}^-) - x_i^\varepsilon(t_{s+k-m}^-)| \frac{3E^{1/2}}{|v_i(t_{s+k-m}^-) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1|} \right) \wedge C_\Lambda \right].$$

With the help of 3.A.3, we can integrate this estimates on $B(E^{1/2}) \times \mathbb{S}^2$ with respect to the measure

$$|\nu_{s+k-m} \cdot (\bar{v}_{s+k-m} - v_{a(s+k-m)}(t_{s+k-m}^+))| d\nu_{s+k-m} d\bar{v}_{s+k-m}$$

and obtain the expected estimates.

Before the first creation punctual and hard sphere backward processes coincide, hence $|x_i^0(t_{s+1}^+) - x_i^\varepsilon(t_{s+1}^+)|$ vanishes. Therefore $m = k$ gives the expected result. \blacksquare

Integrating 3.6.2 on $(\mathbf{v}_s, \mathbf{t}_{s+1, s+r}, \bar{\omega}_{s+r})$,

$$(3.6.4) \quad \int_{\mathbb{G}^0 \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}'_2 \cup \mathcal{P}_3)(\varepsilon)} |\zeta^\varepsilon(0) - \zeta^0(0)| d\mathbf{v}_s d\Lambda^0 \leq \varepsilon |\log \varepsilon|^r \frac{(CE^{5/2})^{s+r} T^r}{r!}.$$

Note that if the domain is the torus, the previous proof provides the bound $\varepsilon (CE^{5/2})^{s+r} T^r / r!$. The factor $|\log \varepsilon|^r$ originates from the grazing reflections, and the author does not believe that this continuity estimate can be improved considerably.

Because f_0^{s+r} is continuous and $(\Lambda \times B(E^{1/2}))^{s+r}$ is compact, f_0^{s+r} is uniformly continuous and the error goes to zero. Moreover $\varphi_s(\mathbf{v}_s)$ is bounded on \mathbb{G}^0 . Finally we get:

Proposition 3.6.3

$$(3.6.5) \quad \int_{\mathbb{G}^0 \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}'_2 \cup \mathcal{P}_3)(\varepsilon)} [f_0^{s+r}(\zeta^\varepsilon(0)) - f_0^{s+r}(\zeta^0(0))] \varphi_s(\mathbf{v}_s) d\mathbf{v}_s d\Lambda^0 \rightarrow 0$$

uniformly in $[0, T] \times K$.

3.6.2 Estimation of \mathcal{P}_1

We decompose \mathcal{P}_1 into sets $\mathcal{P}_1^{i,j,i'}$: for $(\mathbf{v}_s, (\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, s+r}, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{r+s}) \in \mathcal{P}_1^{i,j,i'}$, there is no shift nor recollision in the interval $(t_{i'}, t)$, $\bar{\omega}_j^0(t_{i'}^-) \neq \bar{\omega}_j^\varepsilon(t_{i'}^-)$ at time $t_{i'}$ and the last creation deviating particle j is i . There are at most $(s+r)^3$ such subsets and we only have to control $|\mathcal{P}_1^{i,j,i'}|$.

We denote in the following $k_\iota(\tau)$ the last reflection of the particle ι before time τ . Then $k_j(t_{i'})$ depends only on

$$(\mathbf{v}_s, (\mathbf{t}, \boldsymbol{\nu}, \bar{\mathbf{v}})_{s+1, i}), ((\bar{\omega}_\iota^k)_{\kappa \geq k_\iota(t_i)})_{1 \leq \iota \leq i-1} \subset \bar{\boldsymbol{\omega}}_{s+r}, \text{ and } (\bar{\omega}_j^k)_{k_j(t_i) > \kappa > k_j(t_{i'})}.$$

The shift at time $t_{i'}$ does not depend on the *remaining parameters* (which contribution is bounded by some constant $C(E, T, s+r)$).

Then we look at the set of $(t_{i'}, (\omega_j^k)_{k < k_j(t_i)})$ such that there is a shift. We can bound it directly by T . We want to improve this naive estimation.

We denote, for $k > k_j(t_i)$, τ_k (respectively $\tau_k + \delta\tau$) the time of the reflection of ω_j^k after t_i in the punctual process (respectively in the hard sphere process). Because we restrict to the interval $(t_{i'}, t_i)$, the particle j has no more collisions until the shift. As explained in the previous section until there is a shift, $\delta\tau$ does not depend on k . Denoting $|v| := |v_j(t_i^-)|$, the τ_k follow the recurrence law $\tau_{k-1} = \tau_k - 1/(|v| |\omega_j^k \cdot \mathbf{e}_1|)$. Thus there is a shift only if for some $k \geq k_j(t_i)$, $t_{i'}$ stays between τ_{k+1} and $\tau_{k+1} + \delta\tau$, and thus $t_{i'} \in [\tau_{k+1} - |\delta\tau|, \tau_{k+1} + |\delta\tau|]$.

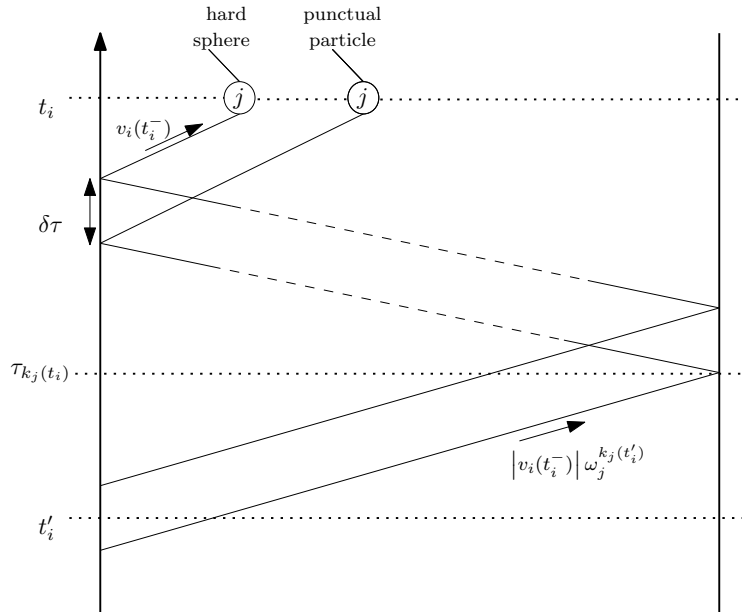


Figure 3.4 – A shift of particle j in $\mathcal{P}_1^{i,j,i'}$.

In the case where the two particles have at least one reflection after t_i , we

have $k < k_j(t_i)$ and

$$|v|((\tau_k - t_{i'}) - |\delta\tau|) \leq \frac{1}{|\omega_j^k \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|} \leq |v|((\tau_k - t_{i'}) + |\delta\tau|)$$

where $v = v_j(t_i^-)$. There is a shift only if the left member is negative and the right one is positive, *i.e.* $t_{i'} \in [\tau_k - |\delta\tau|, \tau_k + |\delta\tau|]$, or if $|\omega_j^k \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|$ stays in

$$\left[\frac{1}{|v|((\tau_k - t_{i'}) + |\delta\tau|)}, \frac{1}{|v|((\tau_k - t_{i'}) - |\delta\tau|)} \right].$$

Using that the surface of $\{\omega \in \mathbb{S}^2, \omega \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \in [a, b]\}$ is smaller than $2\pi((b - a) \wedge 2)$,

$$\begin{aligned} & \int_{[0, T] \times \mathbb{S}^2} \left(\mathbb{1}_{t_{i'} \in [\tau_k - |\delta\tau|, \tau_k + |\delta\tau|]} + \mathbb{1}_{|\omega_j^k \cdot \vec{\mathbf{e}}_1| \in \left[\frac{1}{|v|((\tau_k - t_{i'}) + |\delta\tau|)}, \frac{1}{|v|((\tau_k - t_{i'}) - |\delta\tau|)} \right]} \right) (\omega_j^k \cdot \vec{\mathbf{e}}_1)_+ \\ & \quad \times dt_{i'} d\omega_j^k \\ & \leq C|\delta\tau| + C \int_0^T \left(\mathbb{1}_{t_{i'} \notin [\tau_k - |\delta\tau|, \tau_k + |\delta\tau|]} \frac{|\delta\tau|}{|v|(t_{i'} - \tau_k - |\delta\tau|)(t_{i'} - \tau_k + |\delta\tau|)} \wedge 1 \right) dt_{i'} \\ & \leq C|\delta\tau| + 2C|\delta\tau| \int_1^{T/|\delta\tau|} \frac{1}{|v|(s^2 - 1)} \wedge 1 ds \\ & \leq C|\delta\tau| + \frac{2C|\delta\tau|}{|v|} \\ & \leq C|\delta\tau| \left(1 + \frac{2}{|v \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|} \right). \end{aligned}$$

making the change of variable $s = \pm \frac{t_{i'} - \tau_k}{|\delta\tau|}$.

In the case where only one particle has a reflection in $(t_{i'}, t_i)$, $t_{i'}$ has to stay in $[\tau_1 - |\delta\tau|, \tau_1 + |\delta\tau|]$, and thus in a set of size $2|\delta\tau|$. We sum on all possible "last reflections". There are at most $E^{1/2}T$ reflections and as in the previous section $|\delta\tau| \leq (\varepsilon + |x_{a(i)}^0(t_i) - x_{a(i)}^\varepsilon(t_i)|)/(|v \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|)$. Finally the set of parameters $(t_{i'}, (\omega_j^k)_{k < k_j(t_i)})$ such that there is a shift is of size at most

$$CT \left(\left(\varepsilon + |x_{a(i)}^0(t_i) - x_{a(i)}^\varepsilon(t_i)| \right) \left(\frac{1}{|v \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|} + \frac{1}{|v \cdot \vec{\mathbf{e}}_1|^2} \right) \wedge 1 \right).$$

Integrating over $(\nu_i, \bar{\nu}_i)$, and applying 3.A.3 and 3.A.4, the set of parameters $((\nu_i, \bar{\nu}_i), t_{i'}, (\omega_j^k)_{k < k_j(t_i)})$ is of size at most

$$\left(\varepsilon + |x_{a(i)}^0(t_i) - x_{a(i)}^\varepsilon(t_i)| \right)^{1/2} C(E, T).$$

Combining this estimation, the estimation of $|x_{a(i)}^0(t_i) - x_{a(i)}^\varepsilon(t_i)|$ in 3.6.2 and the estimation of the remaining term, $|\mathcal{P}_1^{i, j, i'}|$ converges uniformly to 0. \blacksquare

3.6.3 Estimation of $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_2' \cup \mathcal{P}_3$.

In the following we look only at the hard sphere process and we drop the exponents ε . We focus on $|\mathcal{P}_2|$; the size of \mathcal{P}_2' and \mathcal{P}_3 can be estimated similarly.

We begin by cutting the grazing velocities: we consider the set of initial parameters \mathcal{P}_4 such that

- for $i \in \{1, \dots, s\}$, $|v_i \cdot \vec{e}_1| > \varepsilon^{1/4}$
- for $i \in \{s+1, \dots, s+r\}$, if the particle j is deviated at time t_i , $|v_j(t_i^-) \cdot \vec{e}_1| > \varepsilon^{1/4}$, $\forall k \in \{1, \dots, i\} \setminus \{j\}$, $|(v_j(t_i^+) - v_k(t_i^+)) \cdot \vec{e}_1| > \varepsilon^{1/4}$,
- for any reflection of a particle i at time τ , the reflected velocity of reflection $v_i(\tau^-) := \omega_i^! |v_i(\tau^+)|$ has to verify $|v_i(\tau_i^-) \cdot \vec{e}_1| > \varepsilon^{1/4}$, $\forall k \neq i$, $|v_j(\tau^-) - v_k(\tau^-)| > \varepsilon^{1/4}$.

Because velocities are bounded by $E^{1/2}$, there are at most $2(s+r)E^{1/2}T$ reflections in the interval $[0, t]$ and the last condition deals only with a finite number of reflection parameters in $\tilde{\omega}_{s+r}$. Hence the size of the set $\mathbb{G}^\varepsilon \setminus \mathcal{P}_4$ goes to zero as ε goes to 0. We restrict to \mathcal{P}_4 from now on. We split $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_4$ into the partition $(\mathcal{P}_{i,j})_{1 \leq i < j \leq s+r}$ where i and j are the two first particles that collide.

We denote k the last creation such that the particles i or j are deviated (it depends only on collision parameters (a, σ)).

We consider first the case where only one particle (say i) is involved in the creation k . To deal with the periodicity of Λ , we consider the covering $\tilde{\Lambda} := [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{P} [0, 1] \times \mathbb{T}^2 = \Lambda$. Particles i , j and k have infinitely many copies $(i_{\vec{k}})$, $(j_{\vec{k}})$, $(k_{\vec{k}})$, with coordinates $(x_{i_{\vec{k}}}(t), v_{i_{\vec{k}}}(t)) := (x_i(t) + \vec{k}, v_i(t))$ for $\vec{k} \in \{0\} \times \mathbb{Z}^2$. If some $i_{\vec{k}}$ has a recollision with a particle $j_{\vec{k}'}$ in $\tilde{\Lambda}$, then the particles i and j have a recollision in Λ . Because v_i and v_j are bounded by $E^{1/2}$, the particle $i_{\vec{0}}$ can interact only with the $j_{\vec{k}}$ for $|\vec{k}| \leq 2TE^{1/2}$. In the following we denote $x_i := x_{i_{\vec{0}}}$, $x_k := x_{k_{\vec{0}}}$ and $x_j := x_{j_{\vec{k}}}$.

First we cut the reflection times t_k such that $|x_i(t_k) - x_j(t_k)| \leq \varepsilon^{1/3}$ and $d(x_i(t_k), \partial\tilde{\Lambda}) < \varepsilon^{1/3}$. We observe that x_k and x_j are polygonal trajectories, with at most $TE^{1/2}$ branches. Thus the two particles can approach each other at most T^2E times at distance less than $\varepsilon^{1/3} + \varepsilon$. Thanks to the condition on $|v_i(t_k^-) \cdot \vec{e}_1|$ and $|v_k(t_k^-) - v_j(t_k^-)|$, for t_k outside a set of size $CT^2E\varepsilon^{1/3-1/4}$, the particle k does not come close to the boundary nor to the particle j .

Then we consider the "virtual" particle \tilde{j} as a particle which moves along straight lines and coincides with j after its last reflection before the recollision, and we denote $(x_{\tilde{j}}(t), v_{\tilde{j}}) := (x_j(\tau_j^-) + (t - \tau_j)v_j(\tau_j^-), v_j(\tau_j^-))$ its coordinates, for τ_j the time of the last reflection of j before the recollision. If there is a recollision between i and j , there is a recollision between i and \tilde{j} . Because $d(x_i(t_k), \partial\tilde{\Lambda})$ and $|x_i(t_k) - x_j(t_k)|$ are greater than $\varepsilon^{1/3}$, $|x_{\tilde{j}}(t_k) - x_i(t_k)| > \varepsilon^{1/3}$.

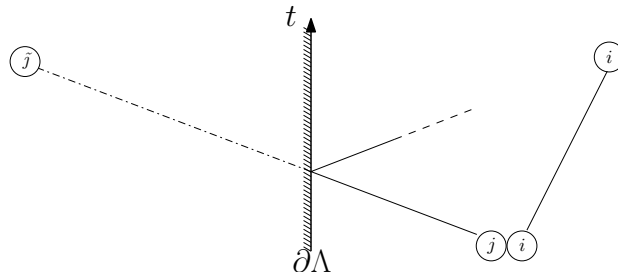


Figure 3.5 – Virtual particle.

If i has no reflection until the recollision, then there exists a time $\tau \in (0, t_k)$ and a direction $\nu_{\text{rec}} \in \mathbb{S}^2$ such that :

$$(x_j(t_k) - x_i(t_k)) + (\tau - t_k)(v_j - v_i(t_k^-)) = \varepsilon \nu_{\text{rec}}.$$

Thus $(v_i(t_k^-) - v_j)$ is in a cone $\mathfrak{C}[(x_j(t_k) - x_i(t_k)), \alpha]$ of axes $(x_j(t_k) - x_i(t_k))$ and angle $\alpha := 2 \arcsin(\varepsilon/|x_j(t_k) - x_i(t_k)|)$. Because $|x_j(t_k) - x_i(t_k)| > \varepsilon^{1/3}$ and $|v_i(t_k)| < E^{1/2}$, $v_i(t_k)$ has to be in a rectangle of size $E^{1/2} \times (CE^{1/2}\varepsilon^{1-1/3})^2$. Hence the size of the set leading to such recollisions goes to zero.

If i has at least one reflection, consider ω_i^l its last reflection before the recollision, τ_l the time of the last reflection and τ the time of recollision. In order to have a recollision, there exists a direction ν_{rec} such that

$$(x_j(\tau_l) - x_i(\tau_l)) + (\tau - \tau_l)(v_j - |v_i(t_k^-)|\omega_i^l) = \varepsilon\nu_{\text{rec}} \\ \Rightarrow \omega_i^l = \frac{v_j}{|v_i(t_k^-)|} + \frac{1}{|v_i(t_k^-)|(\tau_l - \tau)} ((x_i(\tau_l) - x_j(\tau_l)) + \varepsilon\nu_{\text{rec}}).$$

Thus ω_i^l is in $(v_j/|v_i(t_k^-)| + \mathfrak{C}[(x_i(\tau_l) - x_j(\tau_l)), 2 \arcsin \varepsilon/|x_i(\tau_l) - x_j(\tau_l)|]) \cap \mathbb{S}^2$. Because the norm of the velocities lays between $\varepsilon^{1/4}$ and $E^{1/2}$, for $d := |x_i(\tau_l) - x_j(\tau_l)|$, ω_i^l stays in the intersection of \mathbb{S}^2 and a cylinder of radius

$$\left(1 + \frac{|v_j|}{|v_i(t_k^-)|}\right) 2 \tan \left(\arcsin \frac{\varepsilon}{|x_i(\tau_l) - x_j(\tau_l)|} \right) = CE^{1/2} \frac{\varepsilon^{1-1/4}/d}{\sqrt{1 - \varepsilon^2/d^2}}.$$

Finally the set of bad directions of reflection ω_i^l is of size at most :

$$(3.6.6) \quad CE^{1/4} \frac{(\varepsilon^{1-1/4}/d)^{1/2}}{(1 - \varepsilon^2/d^2)^{1/4}} \leq CE^{1/4} \frac{(\varepsilon^{3/4}/d)^{1/2}}{(1 - \varepsilon^2/(T^2E))^{1/4}} \leq CE^{1/2} (\varepsilon^{3/4}/d)^{1/2}$$

using that a particle can cross at most a distance $TE^{1/2}$ and that ε is small enough. In order to control the size of the bad set, we have to cut the trajectories such that $d < \varepsilon^{1/2}$. Let $\{x_j^\parallel\}$ the projection of the straight lines $\{x_j(t), t \in \mathbb{R}\}$ on $\partial\tilde{\Lambda}$. The last change of direction of the particle i is at the previous reflection ω_i^{l-1} or at the creation k , and occurs at point X_i . Because the distance between X_i and $\partial\Lambda$ is greater than $\varepsilon^{1/3}$, the particle i reaches the boundary at distance less than $\varepsilon^{1/2}$ of $\{x_j^\parallel\}$ only if its velocity $v_i(\tau_l^+)$ forms an angle less than $C\varepsilon^{1/2-1/3}$ with the plane passing by $\{x_j^\parallel\}$ and X_i . Integrating on the ω_i^{l-1} or (ν_k, \bar{v}_k) according to the nature of the previous change of direction, the size of parameters such that $d < \varepsilon^{1/2}$ goes to zero.

Now we treat the case where i and j are both involved in the creation k (say $k = i$). We begin by cutting the time where $x_j(t_i)$ is close to the boundary. Because $|v_j(t_i^+) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1| > \varepsilon^{1/4}$, for t_i outside a set of size $CE^{1/2}T\varepsilon^{1/3-1/4}$, $x_j(t_i)$ is at distance greater than $(\varepsilon^{1/3} + \varepsilon)$ of the boundary.

In the case where neither i nor j have a reflection, the particles do not see the boundary and we can treat it as in the case where the domain is \mathbb{T}^3 .

Note that in the precedent paragraph, if i had two reflections, we parametrized the bad set by the two last directions of reflection. Thus the same reasoning works and the size of parameters leading to such recollisions goes to zero.

We have finally to deal with two cases: if the two particles have a reflection or if only one does.

We treat first the case where only i has a reflection which occurs at time τ_l . Because $x_i(t_i^-)$ is at distance at least $\varepsilon^{1/3}$ of $\partial\Lambda$ and $|v_i(t_i^-) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1| < E^{1/2}$, $(t_i - \tau_l)$ is greater than $\varepsilon^{1/3}E^{-1/2}$. The distance d between $x_i(\tau_l)$ and $x_j(\tau_l)$ is greater than

$$d \geq |[\varepsilon\nu_i + (\tau_l - t_i)(v_i(t_i^-) - v_j(t_i^-))] \cdot \bar{\mathbf{e}}_1| > E^{-1/2}\varepsilon^{1/3}\varepsilon^{1/4} - \varepsilon > \varepsilon^{1/2},$$

using that $|(v_i(t_i^-) - v_j(t_i^-)) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1| > \varepsilon^{1/4}$. Thus we can use the estimation 3.6.6. The case where j has a reflection can be treated similarly.

In the case where the two particles have a reflection, we suppose that the last reflection involves the particle i . In the covering domain $\tilde{\Lambda}$, we apply the formula 3.6.6 with

$$d = \left| \vec{d}_0 + (\tau_{\tilde{i}} - \tau_l)v_j|\omega_j^{\tilde{l}} \right|$$

where τ_i (respectively $\tau_{\bar{i}}$) is the time of the last reflection of the particle i (respectively j), $\omega_j^{\bar{i}}$ is the last direction of reflection, and $\vec{d}_0 := x_j(\tau_{\bar{i}}) - x_i(\tau_i)$. We can use the two orthogonal decompositions :

$$\begin{aligned} \vec{d}_0 + (\tau_{\bar{i}} - \tau_i)|v_j|\omega_j^{\bar{i}} &= \left(\vec{d}_0 \cdot \omega_j^{\bar{i}} + (\tau_{\bar{i}} - \tau_i)|v_j| \right) \omega_j^{\bar{i}} + \vec{d}_0^\perp \\ &= \left(|\vec{d}_0| + (\tau_{\bar{i}} - \tau_i)|v_j| \cos \theta \right) \frac{\vec{d}_0}{|\vec{d}_0|} + (\tau_{\bar{i}} - \tau_i)|v_j| \sin \theta \omega_j^{\bar{i}\perp}. \end{aligned}$$

Denoting θ the angle between \vec{d}_0 and $\omega_j^{\bar{i}}$,

$$d \geq \sup \left(\left| \frac{\vec{d}_0^\perp}{|\vec{d}_0|} \right|, |\tau_{\bar{i}} - \tau_i| |v_j| \left| \omega_j^{\bar{i}\perp} \right| \right) \geq |\sin \theta| \sup \left(|\vec{d}_0|, |\tau_{\bar{i}} - \tau_i| |v_j| \right),$$

and the size of bad directions $\omega_i^{\bar{j}}$ is at most

$$\frac{CE^{1/4} (\varepsilon^{1-1/4})^{1/2}}{|\sin \theta|^{1/2}} \inf \left(|\vec{d}_0|^{-1/2}, (|\tau_{\bar{i}} - \tau_i| |v_j|)^{-1/2} \right).$$

The term $|\sin \theta|^{-1/2}$ is integrable with respect to the measure $d\omega_j^{\bar{i}}$. Hence the set of bad directions $(\omega_i^{\bar{j}}, \omega_j^{\bar{i}})$ is of size at most

$$CE^{1/4} \varepsilon^{3/8} \inf \left(|\vec{d}_0|^{-1/2}, (|\tau_{\bar{i}} - \tau_i| |v_j|)^{-1/2} \right).$$

If i and j have a reflection on a different component of $\partial\Lambda$, $|\vec{d}_0| \geq 1$. Else, denoting h (respectively $h + \delta h$) the distance of j (respectively i) from the side of $\partial\Lambda$ where reflections occur,

$$\begin{aligned} |v_j| |\tau_{\bar{i}} - \tau_i| &= |v_j| \left| \frac{h}{v_j \cdot \vec{e}_1} - \frac{h + \delta h}{v_i \cdot \vec{e}_1} \right| \\ &\geq \frac{h |v_i - v_j \cdot \vec{e}_1|}{|v_i \cdot \vec{e}_1|} \frac{|v_j|}{|v_j \cdot \vec{e}_1|} - \frac{|\delta h|}{|v_j \cdot \vec{e}_1|} \\ &\geq E^{1/2} \varepsilon^{1/3+1/4} - \varepsilon^{1-1/4} \\ &\geq \varepsilon^{7/12} \end{aligned}$$

for E large enough. Hence the set of the bad parameters is of size

$$C(E, R, T) \varepsilon^{3/8-7/24} = C(E, R, T) \varepsilon^{1/12}.$$

This allows us to conclude that $|\mathcal{P}_2|$ converges to 0. One can estimate the set of overlaps \mathcal{P}'_2 and \mathcal{P}_3 in the same way. This concludes the proof of Theorem 3.5.1. \blacksquare

3.A Carleman's parametrization and scattering estimates

In section 3.6 we need to estimate some singular integrals with respect to the measure $|(v - v_*) \cdot \nu| dv dv_*$ where v_i can represent v_* , v' or v'_* . In this appendix we give the detailed statement and proofs.

We start by recalling the Carleman's collision parameters

$$(3.A.1) \quad \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow C := \{(v', v'_*) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, (v' - v) \cdot (v'_* - v) = 0\} \\ (v_*, \nu) \mapsto (v', v'_*) \end{cases}$$

which map the measure $|(v - v_*) \cdot \nu| dv_* d\nu$ into $dv' dS(v'_*)$ where (v', v'_*) are given by the scattering and dS is the Lebesgue measure on the affine plane passing through v and normal to $(v' - v)$.

We can then prove our first estimation lemma:

Lemma 3.A.1

Fix $v \in \mathbb{R}^3$ and $a < b$ two real numbers. Then for v_i equal to v_* , v' or v'_* , for some constant $C > 0$

$$(3.A.2) \quad \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \mathbb{1}_{(v_i \cdot \vec{e}_1) \in [a, b]} \mathbb{1}_{|v|^2 + |v_*|^2 \leq E} |(v - v_*) \cdot \nu| dv_* d\nu \leq CE^2 |b - a|.$$

Proof : In the case where $v_i = v_*$, the proof is straightforward. If $v_i = v'$ we apply Carleman's change of variables and the proof is also direct.

In the case where $v_i = v'_*$, we apply Carleman's change of variables. If $v'_* \cdot \vec{e}_1$ is between a and b , then v'_* stays in a rectangle of size $E^{1/2} \times |b - a| / |\sin(\vec{e}_1, v' - v)|$. Then integrating with respect to v' , we obtain the expected bound. ■

From this lemma we can deduce the following estimates:

Proposition 3.A.2

Fix $v \in \mathbb{R}^3$. Then for v_i equal to v_* , v' or v'_* , for some constant $C > 0$

$$(3.A.3) \quad \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \left(\frac{\varepsilon}{|v_i \cdot \vec{e}_1|} \wedge 1 \right) \mathbb{1}_{|v|^2 + |v_*|^2 \leq E} |(v - v_*) \cdot \nu| dv_* d\nu \leq CE^2 \varepsilon |\log \varepsilon|$$

$$(3.A.4) \quad \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \left(\frac{\varepsilon}{|v_i \cdot \vec{e}_1|^2} \wedge 1 \right) \mathbb{1}_{|v|^2 + |v_*|^2 \leq E} |(v - v_*) \cdot \nu| dv_* d\nu \leq CE^2 \varepsilon^{1/2}$$

Proof : We use the previous lemma to decompose the set:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \left(\frac{\varepsilon}{|v_i \cdot \vec{e}_1|} \wedge 1 \right) \mathbb{1}_{|v|^2 + |v_*|^2 \leq E} |(v - v_*) \cdot \nu| dv_* d\nu \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \mathbb{1}_{|v_i \cdot \vec{e}_1| \in [0, \varepsilon]} \mathbb{1}_{|v|^2 + |v_*|^2 \leq E} |(v - v_*) \cdot \nu| dv_* d\nu \\ & \quad + \sum_{1 \leq n \leq E^{1/2}/\varepsilon} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \mathbb{1}_{|v_i \cdot \vec{e}_1| \in [n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]} \mathbb{1}_{|v|^2 + |v_*|^2 \leq E} |(v - v_*) \cdot \nu| dv_* d\nu \\ & \leq CE^2 \varepsilon \left(1 + \sum_{1 \leq n \leq E^{1/2}/\varepsilon} \frac{1}{n} \right) \\ & \leq CE^2 \varepsilon |\log E^{1/2}/\varepsilon| \leq CE^2 \varepsilon |\log \varepsilon| \end{aligned}$$

The proof of the second line is similar.

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \left(\frac{\varepsilon}{|v_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_1|^2} \wedge 1 \right) \mathbb{1}_{|v|^2 + |v_*|^2 \leq E} |(v - v_*) \cdot \nu| dv_* d\nu \\
& \leq \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \mathbb{1}_{|v_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_1| \in [0, \varepsilon^{1/2}]} \mathbb{1}_{|v|^2 + |v_*|^2 \leq E} |(v - v_*) \cdot \nu| dv_* d\nu \\
& \quad + \sum_{1 \leq n} \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \mathbb{1}_{|v_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_1| \in [n\varepsilon^{1/2}, (n+1)\varepsilon^{1/2}]} \mathbb{1}_{|v|^2 + |v_*|^2 \leq E} |(v - v_*) \cdot \nu| dv_* d\nu \\
& \leq CE^2 \varepsilon^{1/2} \left(1 + \sum_{1 \leq n} \frac{1}{n^2} \right) \\
& \leq CE^2 \varepsilon^{1/2}
\end{aligned}$$

■

3.B Hydrodynamic limit

Even if we are actually far from extending our main result to hydrodynamic time scales, we quickly discuss, for the sake of completeness, the link between our kinetic problem and hydrodynamic equations.

We look at the long time behavior (taking a time coordinate $\tau = t/\mathfrak{d}$) of the system when the Knudsen number converges to zero, $\mathfrak{d} := N^{-1}\varepsilon^{-2} \rightarrow 0$. At fixed \mathfrak{d} one considers

$$(3.B.1) \quad \begin{cases} \mathfrak{d} \partial_\tau f_\mathfrak{d} + v \cdot \nabla_x f_\mathfrak{d} = \frac{1}{\mathfrak{d}} Q(f_\mathfrak{d}, f_\mathfrak{d}) \text{ on } \Lambda \times \mathbb{R}^3 \\ f_\mathfrak{d}(\tau, x, v) = \int_{\mathbb{S}^2} f_\mathfrak{d}(\tau, x, |v|\omega) c_3(\omega \cdot n(x))_+ d\omega \text{ on } \Sigma^+, \\ f_\mathfrak{d}(\tau = 0) = f^0. \end{cases}$$

where $\Sigma^+ := \{(x, v) \in \partial\Lambda \times \mathbb{R}^3, v \cdot n(x) < 0\}$. We consider the linearisation of the Boltzmann equation for solutions of the form $f(t, x, v) = M(v)(1 + \delta g(t, x, v))$ when $\delta \ll 1$:

$$(3.B.2) \quad \begin{cases} \mathfrak{d} \partial_\tau g_\mathfrak{d} + v \cdot \nabla_x g_\mathfrak{d} = \frac{1}{\mathfrak{d}} \mathcal{L} g_\mathfrak{d} \text{ on } \Lambda \times \mathbb{R}^3 \\ g_\mathfrak{d}(\tau, x, v) = \int_{\mathbb{S}^2} g_\mathfrak{d}(\tau, x, |v|\omega) c_3(\omega \cdot n(x))_+ d\omega \text{ on } \Sigma^+ \\ g_\mathfrak{d}(\tau = 0) = g^0 \end{cases}$$

where M is the Gaussian density

$$M(v) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}|v|^2},$$

and \mathcal{L} is the linearized collision operator around $M(v)$

$$(3.B.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}g(v) &:= \frac{1}{M(v)} (Q(Mg, M) + Q(M, Mg)) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3} (g(v') + g(v'_*) - g(v) - g(v_*)) ((v - v_*) \cdot \nu)_+ M(v_*) d\nu dv_* \end{aligned}$$

and where (v', v'_*) are given by the scattering of (v, v_*) . The operator \mathcal{L} is self-adjoint and non-positive on $L^2(M(v) dx dv)$.

The hydrodynamic limit of this system is given by the following theorem (see [LB19], or [BGS19] for a proof with a different boundary condition):

Theorem 3.B.1

Let $g_0 \in L^2(M(v)dx dv)$. Then the following statements hold:

- for each $\mathfrak{d} > 0$, $T > 0$ there exists a unique solution $g_{\mathfrak{d}}(\tau) \in \mathcal{C}([0, T], L^2(M(v)dv dx))$ of 3.B.2,
- the $g_{\mathfrak{d}}$ converge weakly in $L^2([0, T], L^2(M(v)dv dx))$ to

$$g_{\text{lim}}(\tau, x, v) = \rho(\tau, x) + u(\tau, x) \cdot v + \theta(\tau, x) \frac{|v|^2 - 3}{2}$$

where (ρ, u, θ) are the solution of the Stokes-Fourier system:

(3.B.4)

$$\begin{cases} \partial_{\tau} u - \nu \Delta u = 0, \quad \partial_{\tau} \theta - \kappa \Delta \theta = 0 \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \nabla(\rho + \theta) = 0 \text{ (incompressible and Boussinesq conditions)} \\ u_{\partial\Lambda} = 0, \quad n \cdot \nabla \theta_{\partial\Lambda} = 0 \\ (\rho, u, \theta)_{\tau=0} = \mathbb{P} \left(\int g^0 M(v) dv, \int g^0 v M(v) dv, \int g^0 \frac{|v|^2 - 3}{2} M(v) dv \right) \end{cases}$$

with \mathbb{P} is the orthogonal projection (for $(L^2(\Lambda))^5$ scalar product) on

$$\left\{ (\rho, u, \theta) \in (L^2(\Lambda))^5, \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot u = 0 \\ \nabla(\rho + \theta) = 0 \end{array} \right. \text{ in the sense of distributions} \right\}$$

and ν, κ are two positive constants depending only on the dimension of the domain.

In the theorem, ρ represents the variation of density of the system, u the mean velocity and θ the variation of temperature. We observe that at the boundary $n(x) \cdot \nabla \theta = 0$, thus no transfer of energy is present.

Chapter 4

The grazing collisions limit from the linearized Boltzmann equation to the Landau equation for short-range potentials

The Landau equation and the Boltzmann equation are connected through the limit of grazing collisions. This has been proved rigorously for certain families of Boltzmann operators concentrating on grazing collisions. In this contribution, we study the collision kernels associated to the two-particle scattering via a finite range potential $\mathcal{V}(x)$ in three dimensions. We then consider the limit of weak interaction given by $\mathcal{V}_\alpha(x) = \alpha\mathcal{V}(x)$. Here $\alpha \rightarrow 0$ is the grazing parameter, and the rate of collisions is rescaled to obtain a non-trivial limit. The grazing collisions limit is of particular interest for potentials with a singularity of order $s \geq 0$ at the origin, i.e. $\mathcal{V}(x) \sim |x|^{-s}$ as $|x| \rightarrow 0$. For $s \in [0, 1]$, we prove the convergence to the Landau equation with diffusion coefficient given by the Born approximation, as predicted in the works of Landau and Balescu. On the other hand, for potentials with $s > 1$ we obtain the non-cutoff Boltzmann equation in the limit. The Coulomb singularity $s = 1$ appears as a threshold value with a logarithmic correction to the diffusive timescale, the so-called *Coulomb logarithm*.

4.1 Introduction

In this paper, we consider the grazing collisions limit for short-range potentials, with a focus on singular potentials. The limit describes the collisional dynamics of a particle system with weak collisions, i.e. when the momentum exchanged in a single collision is small. Consider the Boltzmann equation in dimension three

$$(4.1.1) \quad Q(f, f)(v_1) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v_1 - v_2, \nu) (f(v'_1) f(v'_2) - f(v_1) f(v_2)) d\nu dv_2,$$

where the collision kernel $B(v_1 - v_2, \nu)$ determines the rate of collisions with relative velocity $v_1 - v_2$ and parameter $\nu \in S^2$. More precisely, the in- and outgoing velocities are connected through the elastic collision rule

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{|v_1 - v_2|}{2} \nu, \\ v'_2 &= \frac{v_1 + v_2}{2} - \frac{|v_1 - v_2|}{2} \nu. \end{aligned}$$

The cross-section B can equivalently be expressed as

$$(4.1.3) \quad B(v_1 - v_2, \nu) = \tilde{B}(v_1 - v_2, \cos \theta),$$

where $\theta \in [0, \pi)$ is the deviation angle of the collision. In general, a sequence of Boltzmann operators Q_α describes grazing collisions, if the corresponding collision kernels $\tilde{B}_\alpha(v - v_*, \cos \theta)$ concentrate on angles θ close to $\frac{\pi}{2}$. The family satisfies the grazing collisions limit if

$$(4.1.4) \quad Q_\alpha(f, g) \rightarrow Q_L(f, g) \quad \text{as } \alpha \rightarrow 0,$$

where Q_L is the Landau collision operator

$$(4.1.5) \quad Q_L(f, g) = 2\pi \nabla_v \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{P_{v_1-v_2}^\perp}{|v_1 - v_2|} (\nabla f(v_1)g(v_2) - f(v_1)\nabla g(v_2)) dv_2 \right).$$

Here we denote by $P_{v_1-v_2}^\perp$ the orthogonal projection to $v_1 - v_2 \neq 0$, i.e.:

$$(4.1.6) \quad P_{v_1-v_2}^\perp x = x - \frac{(v_1 - v_2) \cdot x}{|v_1 - v_2|^2} (v_1 - v_2).$$

The Landau equation, and the grazing collisions limit were first introduced for particle systems with Coulomb interaction in [Lan36]. In the physics literature, the grazing limit has subsequently become a general principle for particle systems with weak interaction (cf. [Bal75, LP81]). The grazing collisions limit can also be studied for the linearized Boltzmann- and Landau operators

$$(4.1.7) \quad \mathcal{L}_\alpha \psi = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+^2} (\psi(v'_1) + \psi(v'_2) - \psi(v_1) - \psi(v_2)) M(v_2) \tilde{B}_\alpha(v_1 - v_2, \cos \theta) dv_2 d\nu,$$

$$(4.1.8) \quad \mathcal{K}\psi(v_1) = \frac{2\pi c_V}{M(v_1)} \nabla_v \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{P_{v_1-v_2}^\perp}{|v_1 - v_2|} (\nabla \psi(v_1) - \nabla \psi(v_2)) M(v_1) M(v_2) dv_2 \right),$$

when the challenge is to prove that for some constant $c_V > 0$ the following convergence holds

$$(4.1.9) \quad \mathcal{L}_\alpha \psi \rightarrow \mathcal{K}\psi \quad \text{as } \alpha \rightarrow 0.$$

Here $M(v)$ denotes the Maxwellian equilibrium, without loss of generality with unit temperature

$$(4.1.10) \quad M(v) = \frac{e^{-\frac{1}{2}|v|^2}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}.$$

In this contribution, we study the grazing collisions limit for Boltzmann equations which correspond to pairwise collisions of particles via a radially symmetric pair potential $\mathcal{V}(x)$ with finite range, without loss of generality

$$(4.1.11) \quad \text{supp } \mathcal{V} \subset B_1(0).$$

We then consider the sequence of scaled potentials \mathcal{V}_α , $\alpha \rightarrow 0$, given by

$$(4.1.12) \quad \mathcal{V}_\alpha(x) = \alpha \mathcal{V}(x).$$

This assumption of short-range interaction (4.1.11) has proven to be technically convenient in the derivation of kinetic equations from scaling limits of interacting particle systems (cf. [GSRT13, PSS14]). With the exception of the result in [Ayi17] for super-exponentially decaying potentials, the known derivations of the Boltzmann equation are restricted to short-range interaction. The Boltzmann equation and the grazing collisions limit can be used as an intermediate step in the derivation of the Landau equation from particle systems. This motivates us to bridge the gap between the Boltzmann equation and the Landau equation for short-range interactions. So far, rigorous derivations of the Landau equations are restricted to test particle models, we refer to [BNP14, Cat18, DR01, DGL87, KP80]. For partial results on the derivation of the nonlinear Landau equation see [BPS13, Win21]. A generalization of the method in the present paper to non-compactly supported potentials might be possible, yet technically much more involved. The rescaling (4.1.12) is connected to the classical weak-coupling scaling limit for Hamiltonian N -particle systems with interaction potential \mathcal{V} (cf. p.593 in [Spo80]). Recall that the weak-coupling limit is given by the scaling limit $\bar{\alpha} \rightarrow 0$ and

$$(4.1.13) \quad N = \bar{\alpha}^{-3}, \quad \mathcal{V}_{\bar{\alpha}}(x) = \bar{\alpha}^{\frac{1}{2}} \mathcal{V}(x/\bar{\alpha}).$$

The scaling (4.1.12) considered in this paper can then be related to (4.1.13) by rescaling to the mean free path $L_{\text{free}} \sim \bar{\alpha}$, and $\alpha = \sqrt{\bar{\alpha}}$.

The weak-coupling limit from the Boltzmann equation to the Landau equation has been studied in the model case of power law potentials $\mathcal{V}(x) = |x|^{-(r-1)}$, $r \geq 2$, starting from [Cer88]. For such potentials, the Boltzmann collision kernel factorizes as

$$(4.1.14) \quad \tilde{B}(v - v_*, \cos \theta) = |v - v_*|^{\gamma} b(\cos \theta),$$

for some function b and $\gamma = (r - 5)/(r - 1)$. Notice that for non-power law potentials, the collision kernel is not explicitly known and does not satisfy a similar factorization property.

Since physically relevant interaction potentials are typically singular at the origin, we will study this case in detail here. More precisely, we study potentials \mathcal{V} with

$$(4.1.15) \quad \mathcal{V}(x) \sim \frac{1}{|x|^s}, \quad \text{for } |x| \rightarrow 0,$$

where $s \geq 0$ is the order of the singularity.

It is conjectured that for $s \in [0, 1]$ the Landau equation can be derived through the scaling (4.1.12) on an appropriate timescale (e.g. [NVW21a, NVW21b]). We will give a rigorous proof for this conjecture in Theorem 4.2.2. In particular, this covers the physically important Coulomb singularity $s = 1$, for which we obtain a logarithmic correction of the timescale, which is known as the *Coulomb logarithm*. The Coulomb logarithm is ubiquitous in the plasma physics literature, but there are only few mathematically rigorous results on this notion. As such, the present paper gives a rigorous validation for the onset of the Coulomb logarithm in the grazing limit.

In Theorem 4.2.4, we prove that the Landau equation cannot be obtained for potentials of the form (4.1.15) with $s > 1$. Instead, we prove that for such potentials the scaling (4.1.12) leads to the non-cutoff Boltzmann equation. The result is related to the derivation of the non-cutoff Boltzmann equation from truncations such as [DP99] and [DHTZ21].

We achieve the proof of Theorems 4.2.2 and Theorem 4.2.4 by a careful analysis of the scattering of particles interacting through a singular potential. For the Lorentz gas and non-singular interaction, this has been studied in [DR01], and some elements of the proofs are used in the present paper. However, the main point of our work is the precise analysis

of the grazing limit for singular potentials \mathcal{V} , in particular around the threshold Coulomb singularity $s = 1$.

Previous results

The rigorous analysis of the grazing collisions limit goes back to the classical result of Arsenev and Buryak [AB91]. For the linearized equations, the limit has been verified in [Des92] by directly scaling the Boltzmann collision kernels. A derivation of the Landau equation from the Boltzmann operator for Coulomb collisions can be found in [DLD92].

A general framework for the grazing collisions limit was developed in the celebrated work [AV04]. The result shows the validity of the grazing collisions limit under very natural and general, yet abstract assumptions.

A number of results on the grazing limit have been obtained under the factorization assumption

$$(4.1.16) \quad \tilde{B}_\alpha(v - v_*, \cos \theta) = |v - v_*|^\gamma b_\alpha(\cos \theta),$$

for cross-sections b_α which concentrate on grazing collisions. We refer to [Gou97, He14] for results in this setting. In this framework, it has recently been shown that the gradient flow structures associated to the Boltzmann- and Landau equations are connected through the grazing collisions limit as well [CDW22].

We remark that the grazing limit is also used to connect the spectral analysis of the Boltzmann- and Landau operators (cf. [BM05, Mou06a, MS07]).

Structure of the paper

The plan of the paper is as follows. In Section 4.2 we present the main results of the paper and recall some basic facts on the linearized Boltzmann- and Landau operators. Section 4.3 contains the proof of the grazing collisions limit for potentials \mathcal{V} with singularity $\mathcal{V}(x) \sim |x|^{-s}$ near zero and $s \in [0, 1]$. Finally, in Section 4.4, we prove that for $s > 1$ the limit of weak collisions leads to the non-cutoff Boltzmann equation.

4.2 Preliminaries and main results

Let us recall some basic facts about the Boltzmann equation associated to pairwise collision of particles interacting through a short-range central potential \mathcal{V} satisfying (4.1.11). Consider the associated scattering problem and denote the velocities by $V_1(t), V_2(t)$ and the positions by $X_1(t), X_2(t)$. Without loss of generality, let us assume $|X_1(0) - X_2(0)| = 1$. The equations of motion read

$$(4.2.1) \quad \begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= V_1(t), & \dot{V}_1(t) &= -\nabla \mathcal{V}(X_1(t) - X_2(t)), \\ \dot{X}_2(t) &= V_2(t), & \dot{V}_2(t) &= -\nabla \mathcal{V}(X_2(t) - X_1(t)), \\ X_1(0) - X_2(0) &= \nu \in S^2, & V_i(0) &= v_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Here ν is the unit vector connecting the two particle centers when the particles are about to collide. In order to observe the collision forward in time we restrict to the set S_+^2 defined by

$$(4.2.2) \quad S_+^2 = \{v_2 \in \mathbb{R}^3 : \nu \cdot (v_1 - v_2) \geq 0\}.$$

The outgoing velocities v'_1, v'_2 are then given by

$$(4.2.3) \quad v'_i = \lim_{t \rightarrow \infty} V_i(t), \quad i = 1, 2,$$

whenever the limit in (4.2.3) exists. The Boltzmann operator associated to a finite-range potential \mathcal{V} allows for an equivalent representation in terms of the impact vector $\nu \in S^2$

$$(4.2.4) \quad Q_{\mathcal{V}}(f, g)(v_1) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2_+} (v_1 - v_2) \cdot \nu (f(v'_1)g(v'_2) - f(v_1)f(v_2)) dv_2 d\nu.$$

This representation was originally introduced by Grad (see [Gra49, Gra58]), and can also be found in (cf. [Kin75]). In Grad's representation, the linearized Boltzmann operator (4.1.7) reads

$$(4.2.5) \quad \mathcal{L}_{\alpha} \psi(v_1) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2_+} (\psi(v'_{1,\alpha}) + \psi(v'_{2,\alpha}) - \psi(v_1) - \psi(v_2)) M(v_2) (v_1 - v_2) \cdot \nu dv_2 d\nu,$$

where $v'_{1,\alpha}, v'_{2,\alpha}$ are the outgoing velocities (4.2.3) of the scattering problem (4.2.1) with interaction potential \mathcal{V}_{α} (cf. (4.1.12)) and $M(v)$ is the Maxwellian distribution introduced in (4.1.10).

We remark that the operators \mathcal{L}_{α} (cf. (4.2.5)) and \mathcal{K} (cf. (4.1.8)) are self-adjoint on the natural space

$$(4.2.6) \quad L^2_M(\mathbb{R}^3) := L^2(M(v)dv),$$

with inner product

$$(4.2.7) \quad (\psi, \zeta)_{L^2_M(\mathbb{R}^3)} := \int_{\mathbb{R}^3} \psi(v)\zeta(v)M(v)dv.$$

Let us similarly recall the space

$$(4.2.8) \quad L^2_M(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) := L^2(M(v)dvdvdx).$$

We assume \mathcal{V} to be a short-range potential with a singularity of order $s \in [0, \infty)$ at the origin. More precisely, we make the following assumption on \mathcal{V} .

Assumption 4.2.1 (*Interaction Potential*)

Let $\mathcal{V} \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ be a radially symmetric potential, and further assume that \mathcal{V} is decreasing. Moreover, let \mathcal{V} be of the form

$$(4.2.9) \quad \mathcal{V}(r) = \begin{cases} \frac{f(r)}{|r|^s} & \text{for } 0 < r \leq 1, \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

for some $s \geq 0$ and a decreasing function $f \in C_b^{\infty}(0, 1)$ with $f(0) > 0$, and $f(1) = 0$.

For future reference, let us introduce the function $K(\rho)$, $\rho > 0$, defined by

$$(4.2.10) \quad K(\rho) = \sup_{\rho < r < 1} \{|\mathcal{V}(r)|, r|\mathcal{V}'(r)|, r^2|\mathcal{V}''(r)|\}.$$

We are now in the position to state the first main result.

Theorem 4.2.2 (*Grazing collisions limit*)

Let \mathcal{V} be an interaction potential which satisfies Assumption 4.2.1 for some $s \in [0, 1]$.

Let \mathfrak{d}_α be given by

$$(4.2.11) \quad \mathfrak{d}_\alpha = \begin{cases} \alpha^2 & \text{if } s \in [0, 1), \\ \alpha^2 |\log \alpha| & \text{if } s = 1. \end{cases}$$

Then there exists a constant $c_\mathcal{V} > 0$ such that

$$(4.2.12) \quad \|\mathfrak{d}_\alpha^{-1} \mathcal{L}_\alpha \psi - \mathcal{K} \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C |\log(\alpha)|^{-1} \|\psi\|_{C_b^3(\mathbb{R}^3)},$$

where \mathcal{K} is the operator defined in (4.1.8), with $c_\mathcal{V} > 0$ explicitly given by

$$(4.2.13) \quad c_\mathcal{V} = \begin{cases} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\rho}{u} \mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right)^2 \rho \, d\rho & \text{if } s \in [0, 1), \\ f(0) & \text{if } s = 1. \end{cases}$$

The constant $c_\mathcal{V}$ introduced in (4.2.13) satisfies the identity

$$(4.2.14) \quad 2\pi c_\mathcal{V} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(k \cdot e_1) |k|^2 |\hat{\mathcal{V}}(k)|^2 \, dk,$$

where we use the convention $\hat{\mathcal{V}}(k) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ik \cdot x} \mathcal{V}(x) \, dx$ for the Fourier transform of \mathcal{V} .

The theorem will be proved in the core of the paper in Subsection 4.3.2. Let emphasize that the scaling of \mathfrak{d}_α in (4.2.11) reveals the onset of the Coulomb logarithm for $s = 1$.

It is important to remark that the constant $c_\mathcal{V}$ coincides with the expression derived in other works, such as [BPS13, PS16, NVW21a, NVW21b, Win21]

As a consequence of Theorem 4.2.2, we obtain the convergence for the solutions ψ_α of the linearized Boltzmann equation, to the solution ψ of the linearized Landau equation.

Corollary 4.2.3

Consider \mathcal{L}_α , $\alpha > 0$ the family of linearized Boltzmann operators in Theorem 4.2.2, and let ψ_α be the family of solutions

$$(4.2.15) \quad \partial_t \psi_\alpha + v \cdot \nabla_x \psi_\alpha = \mathfrak{d}_\alpha^{-1} \mathcal{L}_\alpha \psi_\alpha, \quad \psi_\alpha(0) = \psi^\circ.$$

Then the sequence $\psi_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ is uniformly bounded, and

$$(4.2.16) \quad \psi_\alpha \rightharpoonup^* \psi \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}^+; L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)),$$

where ψ solves the linearized Landau equation

$$(4.2.17) \quad \partial_t \psi + v \cdot \nabla_x \psi = \mathcal{K} \psi, \quad \psi(0) = \psi^\circ.$$

The proof of this corollary is rather standard, and can be found in Subsection 4.3.3.

We now discuss the case of short-range potentials \mathcal{V} satisfying Assumption 4.2.1 with $s > 1$. We still obtain a limiting operator \mathcal{L}_∞ for the scaling (4.1.12). However, the limit operator is not the linearized Landau operator. Instead, the family of Boltzmann operators given by the scaling (4.1.12) converges to the linearized non-cutoff Boltzmann operator. The result can also be understood as a limit of truncations of the Boltzmann operator in the spirit of [DP99]. To see this, let

$$(4.2.18) \quad \mathcal{V}(x) = \frac{f(|x|)}{|x|^s}, \quad s > 1,$$

be a potential as in Assumption 4.2.1. Then we have

$$(4.2.19) \quad \mathcal{V}_\alpha(x) = \Lambda_{\alpha^{1/s}}\left(\frac{x}{\alpha^{1/s}}\right),$$

where the potential $\Lambda_{\bar{\alpha}}(x)$ is given by

$$(4.2.20) \quad \Lambda_{\bar{\alpha}}(x) = \frac{f(\bar{\alpha}|x|)}{|x|^s}.$$

This reduces the analysis to the Boltzmann equation associated to the potential $\Lambda_{\bar{\alpha}}(x)$, which is a truncation of the non-cutoff potential at distances $|x| \leq \bar{\alpha}^{-1}$. For a more detailed discussion, see Section 4.4.

More precisely, we obtain the following theorem.

Theorem 4.2.4

Let \mathcal{V} be an interaction potential satisfying Assumption 4.2.1 with $s > 1$. Then for $\psi \in C_B^3(\mathbb{R}^3)$ we have

$$(4.2.21) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha^s} \mathcal{L}_\alpha \psi = \mathcal{L}_\infty \psi,$$

where \mathcal{L}_∞ is the non-cutoff Boltzmann operator given by

$$(4.2.22) \quad \mathcal{L}_\infty \psi = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+^2} (\psi(v'_1) + \psi(v'_2) - \psi(v_1) - \psi(v_2)) M(v_2) \tilde{B}_s(v_1 - v_2, \cos \theta) dv_2 d\nu,$$

where $\tilde{B}_s(v_1 - v_2, \cos \theta)$ is the collision kernel of the homogeneous potential

$$(4.2.23) \quad \mathcal{V}_s(x) = \frac{1}{|x|^s}.$$

The proof of this Theorem is given in Section 4.4.

We observe that the Coulomb singularity with $s = 1$ appears as a threshold value, determining the regions in which Theorem 4.2.2 and Theorem 4.2.4 are valid. Intuitively, this can be understood as a competition between

1. Boltzmann-like collisions with small impact parameter ρ , i.e. $\rho \lesssim l_{\text{coll}}$, where l_{coll} is the collision length

$$(4.2.24) \quad l_{\text{coll}} = \alpha^{\frac{1}{s}}.$$

A single collision of this type yields a deviation of order one in the particle velocity.

2. weak collisions with impact parameter $\rho \gg l_{\text{coll}}$. Such collisions yield small deviations with mean zero and variance α^2 .

The frequency of collisions of type (1) is $\alpha^{\frac{2}{s}}$, the frequency of collisions of type (2) remains unscaled. By comparing the dominant contribution to the variance, we can identify $s = 1$ as the threshold value. At the threshold value, a detailed analysis including logarithmic corrections is required to prove that weak collisions of type (2) are dominant. This is a key point of the present paper.

4.3 Grazing collisions limit for short-range potentials with $s < 1$

4.3.1 Estimates for the two-particle scattering

In this section we give detailed estimates for the collision kernel of the Boltzmann equation based on the two-particle scattering. We start by introducing some definitions. Given incoming velocities $v_1 \neq v_2 \in \mathbb{R}^3$, we denote by η, η' the modulus of the incoming/outgoing relative velocities

$$(4.3.1) \quad \eta = \frac{v_1 - v_2}{|v_1 - v_2|}, \quad \eta' = \frac{v'_1 - v'_2}{|v'_1 - v'_2|}.$$

We also introduce the angle deviation $\hat{\eta}$ and the deflection \hat{v} by

$$(4.3.2) \quad \hat{\eta} = \eta' - \eta, \quad \hat{v} = v'_1 - v_1.$$

For future reference, we remark that the following identity holds

$$(4.3.3) \quad \hat{v} = \frac{|v_1 - v_2|}{2} \hat{\eta}.$$

Let v'_1, v'_2 be the outgoing velocities given by (4.1.2) and some $\nu \in S^2$, then the deviation angle θ is given by

$$(4.3.4) \quad \cos \theta = \eta \cdot \nu.$$

For $\nu \in S^2_+$ as in (4.2.1)-(4.2.3), let the impact factor $\rho > 0$ and η^\perp be given by the identities

$$(4.3.5) \quad \begin{aligned} \rho &= |P_\eta^\perp \nu|, \\ \rho \cdot \eta^\perp &= P_\eta^\perp \nu. \end{aligned}$$

Notice that $\eta^\perp \in S_\eta^1 := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| = 1, v \cdot \eta = 0\}$. Since we only consider rotationally symmetric potentials \mathcal{V} , we can choose without loss of generality an orthonormal frame such that $\eta = e_1$ and $\eta^\perp = e_2$, i.e.

$$(4.3.6) \quad \nu = (\sqrt{1 - \rho^2}, \rho, 0), \quad \nu \cdot (v_1 - v_2) d\nu = |v_1 - v_2| \rho d\rho d\eta^\perp.$$

Using the impact parameter ρ as integration variable, the linearized Boltzmann operator \mathcal{L}_ε takes the form

$$(4.3.7) \quad \mathcal{L}_\varepsilon \psi(v_1) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_\eta^1} \int_0^1 (\psi(v'_{1,\varepsilon}) + \psi(v'_{2,\varepsilon}) - \psi(v_1) - \psi(v_2)) \rho M(v_2) |v_1 - v_2| d\rho d\eta^\perp dv_2.$$

Our estimates of the family of operators introduced in (4.3.7) rely on the following representation of the scattering angle θ (cf. (4.3.4))

$$(4.3.8) \quad \theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{4\mathcal{V}_\alpha(r)}{|v_1 - v_2|^2}}} dr,$$

which can be found for example in [GSRT13], section 8.3. Here r_{\min} is the minimal distance of the particles

$$(4.3.9) \quad r_{\min} := \inf_{t \in [0, \infty)} |X_1(t) - X_2(t)|,$$

which satisfies the identity

$$(4.3.10) \quad 1 - \frac{4\alpha\mathcal{V}(r_{\min})}{|v_1 - v_2|^2} - \frac{\rho^2}{r_{\min}^2} = 0.$$

First we establish the following asymptotics for the angle θ (cf. (4.3.8)):

Lemma 4.3.1

Let $\kappa = \frac{2\alpha}{|v_1 - v_2|^2}$. Then

$$(4.3.11) \quad \left| \theta(\rho) + 2\kappa \int_0^1 \frac{\rho}{u} \mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right| \leq C\kappa^2 K^2(\rho), \quad \text{for } \kappa < \frac{\rho^s}{4f(0)}$$

where $K(\rho)$ as defined in (4.2.10).

This estimate is valid when $\alpha f(0)/\rho^s \leq |v_1 - v_2|^2/4$, i.e. when the kinetic energy is higher than the potential energy. Note that in the following proof we use only that \mathcal{V} is a decreasing potential so the proof is valid for potentials with singularity $s > 1$ and with non-compact support.

Proof : This step is an adaptation of the proof of Proposition 1 in [DR01], for the case of singular potentials. We change variables to the implicit variable u given by

$$(4.3.12) \quad u = \frac{\rho}{r\sqrt{1-2\kappa\mathcal{V}(r)}}, \quad du = -\frac{\rho}{r^2\sqrt{1-2\kappa\mathcal{V}(r)}} \left(1 - \frac{r\kappa\mathcal{V}'(r)}{1-2\kappa\mathcal{V}(r)}\right) dr.$$

Using this we obtain

$$(4.3.13) \quad \begin{aligned} \theta &= \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{4\mathcal{V}_\alpha(r)}{|v_1 - v_2|^2}}} dr \\ &= \pi - 2 \int_0^1 \frac{1 - 2\kappa\mathcal{V}(r)}{(1 - 2\kappa\mathcal{V}(r) - r\kappa\mathcal{V}'(r))\sqrt{1-u^2}} du \\ &= 2 \int_0^1 1 - \frac{1 - 2\kappa\mathcal{V}(r)}{(1 - 2\kappa\mathcal{V}(r) - r\kappa\mathcal{V}'(r))\sqrt{1-u^2}} du \\ &= 2 \int_0^1 \frac{r\kappa\mathcal{V}'(r)}{(1 - 2\kappa\mathcal{V}(r) - r\kappa\mathcal{V}'(r))\sqrt{1-u^2}} du. \end{aligned}$$

The integrand can be expanded as

$$(4.3.14) \quad \begin{aligned} \frac{r\kappa\mathcal{V}'(r)}{(1 - 2\kappa\mathcal{V}(r) - r\kappa\mathcal{V}'(r))} &= \kappa \frac{\rho}{u} \mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right) + \kappa(r\mathcal{V}'(r) - \frac{\rho}{u}\mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right)) \\ &\quad + \kappa^2 \frac{\mathcal{V}'(r)(2\mathcal{V}(r) + r\mathcal{V}'(r))}{1 - 2\kappa\mathcal{V}(r) - r\kappa\mathcal{V}'(r)} \end{aligned}$$

For $\kappa < \frac{\rho^s}{4f(0)}$, we can bound the second and third term of the expansion (4.3.14) by

$$\begin{aligned} &\left| \kappa(r\mathcal{V}'(r) - \frac{\rho}{u}\mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right)) + \kappa^2 \frac{\mathcal{V}'(r)(2\mathcal{V}(r) + r\mathcal{V}'(r))}{1 - 2\kappa\mathcal{V}(r) - r\kappa\mathcal{V}'(r)} \right| \\ &\leq \kappa \left| r - \frac{\rho}{u} \right| \sup_{w \in \left(\frac{\rho}{u}, r\right)} (|\mathcal{V}'(w)| + w|\mathcal{V}''(w)|) + \kappa^2 C K^2(\rho) \end{aligned}$$

Since $\mathcal{V}(r) \geq 0$ and $u \in (0, 1)$, the change of variables (4.3.12) satisfies $r \geq \rho$. Therefore we have

$$(4.3.15) \quad \left| r - \frac{\rho}{u} \right| = \left| \frac{\rho}{u} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa\mathcal{V}(r)}}\right) \right| \leq \frac{C\rho}{u} |\kappa\mathcal{V}(r)| \leq \frac{C\kappa K(\rho)\rho}{u}.$$

Inserting this above, we obtain

$$(4.3.16) \quad \left| \kappa(r\mathcal{V}'(r) - \frac{\rho}{u}\mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right)) + \kappa^2 \frac{\mathcal{V}'(r)(2\mathcal{V}(r) + r\mathcal{V}'(r))}{1 - 2\kappa\mathcal{V}(r) - r\kappa\mathcal{V}'(r)} \right| \leq \kappa^2 C K^2(\rho).$$

In combination with the expansion (4.3.14) this yields the desired estimate (4.3.11). \blacksquare
 In the following two corollaries, we give integral estimates which can be derived from Lemma 4.3.1.

Corollary 4.3.2

Let \mathcal{V} satisfy Assumption 4.2.1, $s \geq 0$ and recall the notation $\kappa = \frac{2\alpha}{|v_1 - v_2|^2}$. Then the following estimates hold:

1. For $s \in [0, 1)$, we have

$$(4.3.17) \quad \begin{aligned} \left| \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \rho \, d\rho - \kappa^2 c_{\mathcal{V}} \right| &\leq C \kappa^{\frac{2}{s}}, \\ \int_0^1 |\theta|^3 \rho \, d\rho &\leq C \kappa^{\frac{2}{s}}, \end{aligned}$$

where $c_{\mathcal{V}}$ is given by (4.2.13).

2. Similarly, for $s = 1$ we can estimate

$$(4.3.18) \quad \begin{aligned} \left| \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \rho \, d\rho - \kappa^2 |\log \kappa| c_{\mathcal{V}} \right| &\leq C \kappa^2, \\ \int_0^1 |\theta|^3 \rho \, d\rho &\leq C \kappa^2. \end{aligned}$$

Proof : We give the proof of (4.3.18), the adaptation to the case $s \in [0, 1)$ is straightforward.

We observe that there exists a constant $C > 0$ such that

$$(4.3.19) \quad K(\rho) \leq \frac{C}{\rho},$$

which we use to infer the estimate

$$(4.3.20) \quad \left| \kappa \int_{\rho}^1 \frac{\rho}{u} \mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right| \leq \left| \kappa \int_{\rho}^1 K(\rho) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right| \leq \frac{C\kappa}{\rho}.$$

Next, we observe that by assumption on \mathcal{V}

$$r\mathcal{V}'(r) = -\frac{f(r)}{r} + g(r),$$

for some continuous, bounded function g . Therefore, for some constant $C > 0$ we can estimate

$$\left| \int_{\rho}^1 \frac{\rho}{u} \mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{f(0)}{\rho} \right| \leq C.$$

For $\rho > 4f(0)\kappa$, we can apply (4.3.11) and (4.3.20) to obtain

$$(4.3.21) \quad \left| \frac{\theta(\rho)}{2} - \frac{\kappa f(0)}{\rho} \right| \leq C \left(\kappa + \frac{\kappa^2}{\rho^2} \right),$$

$$(4.3.22) \quad |\theta(\rho)| \leq C \frac{\kappa}{\rho}.$$

We use these estimates to bound

$$\begin{aligned} \left| \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{f(0)^2}{\rho^2} \right| &\leq \left| \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \right| + \left| \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa f(0)}{\rho}\right)^2 \right| \\ &\leq C|\theta|^3 + C\frac{\kappa}{\rho}\left(\kappa + \frac{\kappa^2}{\rho^2}\right) \\ &\leq C\left(\frac{\kappa^2}{\rho} + \frac{\kappa^3}{\rho^3}\right), \end{aligned}$$

for $\rho > 4f(0)\kappa$. We now separate the regions $\rho > 4f(0)\kappa$ and $\rho < 4f(0)\kappa$ and conclude

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\rho d\rho - \kappa^2 |\log 4f(0)\kappa| f^2(0) \right| &\leq \int_0^{4f(0)\kappa} \rho d\rho + \int_{4f(0)\kappa}^1 \left| \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{f(0)^2}{\rho^2} \right| \rho d\rho \\ &\leq C\kappa^2 + \int_{4f(0)\kappa}^1 C\left(\frac{\kappa^2}{\rho} + \frac{\kappa^3}{\rho^3}\right)\rho d\rho \\ &\leq C\kappa^2, \end{aligned}$$

which proves the first assertion in (4.3.18). The second assertion follows immediately from (4.3.21). \blacksquare

Corollary 4.3.3

For $s \in (0, 1)$, we have the bound

$$(4.3.23) \quad \begin{aligned} \left| \int_{S_+^2} \hat{v}(v_1 - v_2) \cdot \nu d\nu + \frac{8\pi c_V \alpha^2}{|v_1 - v_2|^2} \eta \right| &\leq C \frac{\alpha^{\frac{2}{s}}}{|v_1 - v_2|^{\frac{4}{s}-2}} \\ \left| \int_{S_+^2} (\hat{v} \otimes \hat{v})(v_1 - v_2) \cdot \nu d\nu - \frac{4\pi c_V \alpha^2}{|v_1 - v_2|} P_\eta^\perp \right| &\leq C \frac{\alpha}{|v_1 - v_2|^{\frac{4}{s}-3}} \\ \int_{S_+^2} |\hat{v}|^3 |(v_1 - v_2) \cdot \nu| d\nu &\leq C \frac{4\alpha^{\frac{2}{s}}}{|v_1 - v_2|^{\frac{4}{s}-4}}. \end{aligned}$$

For $s = 1$, and $|v_1 - v_2| \geq (2\alpha)^{\frac{1}{2}}$ the following estimate holds:

$$(4.3.24) \quad \begin{aligned} \left| \int_{S_+^2} \hat{v}(v_1 - v_2) \cdot \nu d\nu + \frac{8\pi c_V \alpha^2 |\log \alpha|}{|v_1 - v_2|^2} \eta \right| &\leq C \frac{\alpha^2 |\log(v_1 - v_2)|}{|v_1 - v_2|^2} \\ \left| \int_{S_+^2} (\hat{v} \otimes \hat{v})(v_1 - v_2) \cdot \nu d\nu - \frac{4\pi c_V \alpha^2 |\log \alpha|}{|v_1 - v_2|} P_\eta^\perp \right| &\leq C \frac{\alpha^2 |\log(v_1 - v_2)|}{|v_1 - v_2|} \\ \int_{S_+^2} |\hat{v}|^3 |(v_1 - v_2) \cdot \nu| d\nu &\leq C\alpha^2. \end{aligned}$$

Proof : We will only demonstrate the proof of (4.3.23), the proof of (4.3.24) is analogous.

By definition of θ (cf. (4.3.4)), the collision rule (4.3.4) and definition of η^\perp (4.3.6) we can rewrite \hat{v} as

$$(4.3.25) \quad \hat{v} = v'_1 - v_1 = \frac{|v_1 - v_2|}{2} \left((\cos \theta - 1)\eta + \sin(\theta)\eta^\perp \right).$$

Furthermore, we recall the change of variables (4.3.6) and compute

$$(4.3.26) \quad \int_{S_+^2} \hat{v}(v_1 - v_2) \cdot \nu d\nu = \int_{S_\eta^1} \int_0^1 \rho \frac{|v_1 - v_2|^2}{2} \left((\cos \theta - 1)\eta + \sin(\theta)\eta^\perp \right) d\rho d\eta^\perp$$

$$(4.3.27) \quad = -2\pi \int_0^1 \rho |v_1 - v_2|^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \eta d\rho$$

The first line in (4.3.23) now follows immediately from (4.3.17).

For the proof of the second line in (4.3.23) we again use (4.3.25) and find

$$(4.3.28) \quad \int_{S_+^2} (\hat{v} \otimes \hat{v})(v_1 - v_2) \cdot \nu d\nu$$

$$(4.3.29) \quad = \int_0^1 \int_{S_\eta^1} \left(\frac{|v_1 - v_2|}{2} \left((\cos \theta - 1)\eta + \sin(\theta)\eta^\perp \right) \right)^{\otimes 2} |v_1 - v_2| \rho d\rho d\eta^\perp$$

$$(4.3.30) \quad = \int_0^1 \int_{S_\eta^1} \left(\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\eta + \frac{\sin(\theta)}{2}\eta^\perp \right)^{\otimes 2} |v_1 - v_2|^2 \rho d\rho d\eta^\perp$$

$$(4.3.31) \quad = \int_0^1 \int_{S_\eta^1} (\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\eta)^{\otimes 2} + \left(\frac{\sin(\theta)}{2}\eta^\perp\right)^{\otimes 2} |v_1 - v_2|^2 \rho d\rho d\eta^\perp$$

$$(4.3.32) \quad = \int_0^1 \int_{S_\eta^1} (\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\eta^{\otimes 2} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\eta^\perp)^{\otimes 2}) |v_1 - v_2|^2 \rho d\rho d\eta^\perp.$$

Now the claim follows from (4.3.17) and the identity

$$(4.3.33) \quad \int_{S_\eta^1} \eta^\perp \otimes \eta^\perp d\eta^\perp = \pi P_\eta^\perp$$

The third line in (4.3.23) follows along the same lines using (4.3.17). ■

4.3.2 Proof of Theorem 4.2.2

We are now in the position to prove Theorem 4.2.2.

Proof of Theorem 4.2.2 : Let $\psi \in C_b^3(\mathbb{R}^3)$ be arbitrary, and $v_1 \in \mathbb{R}^3$. We then expand ψ to find

$$(4.3.34) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \psi(v_1) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+^2} (\psi(v'_{1,\alpha}) + \psi(v'_{2,\alpha}) - \psi(v_1) - \psi(v_2)) M(v_2) (v_1 - v_2) \cdot \nu dv_2 d\nu \\ &= I_1(v) + I_2(v) + R(v_1), \end{aligned}$$

where I_1 and I_2 are given by

$$I_1(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+^2} (\hat{v} \cdot \nabla \psi(v_1) + \frac{1}{2} \nabla^2 \psi(v_1) : [\hat{v} \otimes \hat{v}]) M(v_2) (v_1 - v_2) \cdot \nu dv_2 d\nu$$

$$I_2(v) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+^2} (\hat{v} \cdot \nabla \psi(v_2) + \frac{1}{2} \nabla^2 \psi(v_2) : [\hat{v} \otimes \hat{v}]) M(v_2) (v_1 - v_2) \cdot \nu dv_2 d\nu,$$

and $R(v_1)$ is a remainder which can be estimated by

$$|R(v_1)| \leq C_\psi \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S_+^2} |\hat{v}|^3 M(v_2) |(v_1 - v_2) \cdot \nu| dv_2 d\nu.$$

We now distinguish the case $s = 1$ from $s \in [0, 1)$.

Step 1. $s = 1$:

From (4.3.24) we obtain

$$|R(v_1)| \leq C_\psi \alpha^2.$$

It remains to determine the limit of I_1 and I_2 . Using (4.3.24) we get

$$\begin{aligned} & \left| I_1(v_1) + 2\pi\alpha^2 |\log \alpha| c_\gamma \int_{\mathbb{R}^3} \frac{4\eta \nabla \psi(v_1)}{|v_1 - v_2|} - \frac{P_\eta^\perp}{|v_1 - v_2|} : \nabla^2 \psi(v) M(v_2) dv_2 \right| \\ & \leq C_\psi \int_{\{v_2: |v_1 - v_2| \geq \alpha^{\frac{1}{2}}\}} \left(\frac{\alpha^2 |\log(|v_1 - v_2|)|}{|v_1 - v_2|^2} + \frac{\alpha^2 |\log(|v_1 - v_2|)|}{|v_1 - v_2|} \right) M(v_2) dv_2 \\ & \quad + \int_{\{v_2: |v_1 - v_2| \leq \alpha^{\frac{1}{2}}\}} |\hat{v}| M(v_2) dv_2 \\ & \leq C_\psi \alpha^2. \end{aligned}$$

Notice that in the last inequality we have made use of $|\hat{v}| \leq |v_1 - v_2|$, which follows from (4.3.3). Performing the same estimate for I_2 we obtain

$$\begin{aligned} & |\mathcal{L}_\alpha \psi(v_1) - 2\pi\alpha^2 |\log \alpha| c_\gamma \mathcal{L}_0 \psi(v_1)| \leq C_\psi \alpha^2, \quad \text{where} \\ \mathcal{L}_0 \psi & = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{4\eta \cdot (\nabla \psi(v_2) - \nabla \psi(v_1))}{|v_1 - v_2|^2} + \frac{P_\eta^\perp : (\nabla^2 \psi(v_1) + \nabla^2 \psi(v_2))}{|v_1 - v_2|} \right) M(v_2) dv_2. \end{aligned}$$

Step 3. It remains to show that \mathcal{L}_0 coincides with the desired Landau operator.

To this end, we first remark that

$$\nabla \cdot \frac{P_\eta^\perp}{|v_1 - v_2|} = -2 \frac{v_1 - v_2}{|v_1 - v_2|^3}.$$

This allows us to rewrite \mathcal{L}_0 as (writing $\mathcal{A} = \frac{P_\eta^\perp}{|v_1 - v_2|}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \psi & = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{4\eta \cdot (\nabla \psi(v_2) - \nabla \psi(v_1))}{|v_1 - v_2|^2} + \frac{P_\eta^\perp : (\nabla^2 \psi(v_1) + \nabla^2 \psi(v_2))}{|v_1 - v_2|} \right) M(v_2) dv_2 \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} ((\nabla_{v_1} - \nabla_{v_2})(\mathcal{A})(\nabla \psi(v_1) - \nabla \psi(v_2)) + \mathcal{A}(\nabla^2 \psi(v_1) + \nabla^2 \psi(v_2))) M(v_2) dv_2 \\ & = \frac{1}{M(v_1)} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla_{v_1} - \nabla_{v_2}) [\mathcal{A}(\nabla \psi(v_1) - \nabla \psi(v_2)) + \mathcal{A}(\nabla^2 \psi(v_1))] M(v_1) M(v_2) dv_2, \end{aligned}$$

which finally leads to

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \psi & = \frac{1}{M(v_1)} \nabla_{v_1} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{A}(\nabla \psi(v_1) - \nabla \psi(v_2)) + \mathcal{A}(\nabla^2 \psi(v_1)) M(v_1) M(v_2) dv_2 \right) \\ & \quad - \frac{1}{M(v_1)} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{A}(\nabla \psi(v_1) - \nabla \psi(v_2)) + \mathcal{A}(\nabla^2 \psi(v_1))) (\nabla_{v_1} - \nabla_{v_2}) [M(v_1) M(v_2)] dv_2. \end{aligned}$$

The first line coincides with $\mathcal{K}\psi$. It now remains to remark that the last line vanishes

$$\mathcal{A} \cdot (\nabla_{v_1} - \nabla_{v_2}) [M(v_1) M(v_2)] = 0,$$

hence $\mathcal{L}_0 = \mathcal{K}$.

Step 4. The case $s \in [0, 1)$ follows analogous to the case $s = 1$.

Step 5. It remains to prove the identity (4.2.14). We start by changing variables $r = \frac{\rho}{u}$

$$I(\rho) := \int_0^1 \frac{\rho}{u} \mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_\rho^1 \frac{\rho \mathcal{V}'(r)}{r \sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}} dr.$$

We further change variables $y^2 + \rho^2 = r^2$ to find

$$I(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{V}'(\sqrt{y^2 + \rho^2}) \rho}{\sqrt{y^2 + \rho^2}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \nabla \mathcal{V}(\rho e_1 + y e_2) \cdot e_2 dy$$

Hence, $I(\rho)$ is the rectilinear force evaluated along a trajectory. Due to the radial symmetry of \mathcal{V} we have

$$I^2(\rho) = \frac{1}{4} \left| \int_{\mathbb{R}} \nabla \mathcal{V}(\rho e_1 + y e_2) dy \right|^2.$$

Inserting this representation back into the formula for $c_{\mathcal{V}}$ reveals

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{V}} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\rho}{u} \mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right)^2 \rho d\rho = \int_0^1 I(\rho)^2 \rho d\rho \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} \left| \int_{\mathbb{R}} \nabla \mathcal{V}(\rho e_1 + y e_2) dy \right|^2 \rho d\rho \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(e_1 \cdot x) \left| \int_{\mathbb{R}} \nabla \mathcal{V}(x + y e_1) dy \right|^2 dx. \end{aligned}$$

We pass to Fourier variables using Plancherel's identity

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{V}} &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(e_1 \cdot x) \left| \int_{\mathbb{R}} \nabla \mathcal{V}(x + y e_1) dy \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{32\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(e_1 \cdot k) |k|^2 |\hat{\mathcal{V}}(k)|^2 dx \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty k^3 |\hat{\mathcal{V}}(k)|^2 dk, \end{aligned}$$

and obtain the desired identity. ■

4.3.3 Proof of Corollary 4.2.3

Proof of Corollary 4.2.3 : We use the well-known fact that \mathcal{L}_α is a family of self-adjoint non-positive operators on $L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Indeed, symmetrizing the operator we obtain for any function $\psi \in L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$

(4.3.35)

$$(\mathcal{L}_\alpha \psi, \psi)_{L_M^2} = -\frac{1}{4} \int (\psi'_1 + \psi'_2 - \psi_1 - \psi_2)^2 M(v_1) M(v_2) (v_1 - v_2) \cdot \nu dv_1 dv_2 d\nu dx$$

(4.3.36) $\leq 0.$

This immediately shows our solutions are uniformly bounded by

(4.3.37) $\|\psi_\alpha(t)\|_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \leq \|\psi_\alpha^\circ\|_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}.$

By compactness, there exists a ψ in $L^\infty(\mathbb{R}^+, L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$ and a subsequence ψ_α , such that

$$(4.3.38) \quad \psi_\alpha \rightharpoonup^* \psi, \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}^+, L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)).$$

It remains to show that ψ is the desired solution of the linearized Landau equation. To this end, let $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ be arbitrary. Using the self-adjointness of \mathcal{L}_α we get

$$\begin{aligned} & (\psi_\alpha(t), \zeta(t))_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} - (\psi^\circ, \zeta(0))_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \\ &= \mathfrak{d}_\alpha^{-1} \int_0^t (\mathcal{L}_\alpha \psi_\alpha(s), \zeta(s))_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} ds + \int_0^t (\psi_\alpha(s), v \cdot \nabla_x \zeta(s))_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} ds \\ &= \mathfrak{d}_\alpha^{-1} \int_0^t (\psi_\alpha(s), \mathcal{L}_\alpha \zeta(s))_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} ds + \int_0^t (\psi_\alpha(s), v \cdot \nabla_x \zeta(s))_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned}$$

Now we can pass to the limit. Since $\mathfrak{d}_\alpha^{-1} \mathcal{L}_\alpha \zeta \rightarrow \mathcal{K} \zeta$ in $L^1(\mathbb{R}^+; L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$, and $\psi_\alpha \rightharpoonup^* \psi$, we get

$$\begin{aligned} & (\psi_\alpha(t), \zeta(t))_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} - (\psi^\circ, \zeta(0))_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} \\ &= \int_0^t (\psi(s), \mathcal{K} \zeta(s))_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} + (\psi_\alpha(s), v \cdot \nabla_x \zeta(s))_{L_M^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} ds. \end{aligned}$$

Since \mathcal{K} is also self-adjoint, ψ satisfies the linearized Landau equation, and the claim follows. \blacksquare

4.4 Convergence to non-cutoff Boltzmann equation for short-range potentials with $s > 1$

Proof of Theorem 4.2.4 : In order to simplify the presentation, fix $f(0) = 1$.

Recall the auxiliary potential λ_α (cf. (4.2.20)), i.e.

$$(4.4.1) \quad \Lambda(x) = \lambda(|x|), \quad \lambda(r) = 1/r^s,$$

$$(4.4.2) \quad \Lambda_\alpha(x) = \lambda_\alpha(|x|), \quad \lambda_\alpha(r) = f(\alpha r)/r^s,$$

and the identity

$$(4.4.3) \quad \mathcal{V}_\alpha(x) = \Lambda_{\alpha^{1/s}} \left(\frac{x}{\alpha^{1/s}} \right).$$

Due to this scale invariance, we can relate the scattering map associated to \mathcal{V}_α to the scattering map associated to $\Lambda_{\alpha^{1/s}}$. More precisely, let $X_i(t), V_i(t), t \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 2$ solve

$$(4.4.4) \quad \dot{X}_i(t) = V_i, \quad \dot{V}_i(t) = - \sum_{j \neq i} \nabla \mathcal{V}_\alpha(X_i - X_j),$$

then $\tilde{X}_i(t) = \alpha^{-\frac{1}{s}} X_i(t \alpha^{\frac{1}{s}}), \tilde{V}_i(t) = V_i(t \alpha^{\frac{1}{s}})$ solve

$$(4.4.5) \quad \dot{\tilde{X}}_i(t) = \tilde{V}_i, \quad \dot{\tilde{V}}_i(t) = - \sum_{j \neq i} \nabla \Lambda_{\alpha^{1/s}}(\tilde{X}_i - \tilde{X}_j).$$

Therefore the scattering of particles through \mathcal{V}_α with collision parameters $(v_1, v_2, \rho, \eta^\perp)$ are up to scaling equivalent to the scattering through $\Lambda_{\alpha^{1/s}}$ with collision parameters $(v_1, v_2, \alpha^{-1/s}\rho, \eta^\perp)$. Hence, the corresponding linearized Boltzmann operators satisfy

$$(4.4.6) \quad \alpha^{-2/s} \mathcal{L}_{\mathcal{V}_\alpha} = \mathcal{L}_{\Lambda_{\alpha^{1/s}}}.$$

Therefore, it remains to prove that for any $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$\mathcal{L}_{\Lambda_\alpha} \psi \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{L}_\infty \psi := \mathcal{L}_{\mathcal{V}} \psi$$

uniformly on \mathbb{R}^3 .

We will do so by direct comparison of the scattering problems associated to the potentials Λ_α and \mathcal{V} .

To this end, let $v_1 \neq v_2$ be incoming velocities and ρ an impact factor. As before we write

$$(4.4.7) \quad \eta := \frac{v_1 - v_2}{|v_1 - v_2|}.$$

We denote by $(v'_{1,\alpha}, v'_{2,\alpha})$ the post-collisional velocities and by θ_α the deviation angle obtained for the pair potential Λ_α for a given impact parameter ρ . Similarly, we denote by v'_1, v'_2 and θ the corresponding variables associated to the scattering via the limiting potential \mathcal{V} . Recall that the outgoing velocities are given by ($i = 1, 2$):

$$(4.4.8) \quad \begin{aligned} v'_i &= \frac{v_1 + v_2}{2} - (-1)^i \frac{|v_1 - v_2|}{2} \left(\sin \theta \cdot \eta^\perp + \cos \theta \cdot \eta \right), \\ v'_{i,\alpha} &= \frac{v_1 + v_2}{2} - (-1)^i \frac{|v_1 - v_2|}{2} \left(\sin \theta_\alpha \cdot \eta^\perp + \cos \theta_\alpha \cdot \eta \right). \end{aligned}$$

We separate the regions

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\alpha &:= \{(v_2, \rho) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+, |v_2 - v_1| > 3\alpha^{s/20}, \rho < \alpha^{-1/10}/2\}, \\ \mathcal{P}_\alpha &:= \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \setminus \mathcal{Q}_\alpha. \end{aligned}$$

On the set \mathcal{Q}_α , we have good control of the scattering problem, while the set \mathcal{P}_α leads to an error term. We therefore introduce separate their respective contributions to $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ and $\mathcal{L}_{\Lambda_\alpha}$ by introducing the decomposition

$$(4.4.9) \quad \mathcal{L}_{\mathcal{V}} \psi(v_1) = \mathcal{L}_{\mathcal{V},1} \psi(v_1) + \mathcal{L}_{\mathcal{V},2} \psi(v_1),$$

where $\mathcal{L}_{\mathcal{V},1}$ and $\mathcal{L}_{\mathcal{V},2}$ are given by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{V},1} \psi(v_1) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{Q}_\alpha} \int_{S_\eta^1} (\psi(v'_1) + \psi(v'_2) - \psi(v_1) - \psi(v_2)) \rho |v_2 - v_1| M(v_2) d\eta^\perp d\rho dv_2, \\ \mathcal{L}_{\mathcal{V},2} \psi(v_1) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{P}_\alpha} \int_{S_\eta^1} (\psi(v'_1) + \psi(v'_2) - \psi(v_1) - \psi(v_2)) \rho |v_2 - v_1| M(v_2) d\eta^\perp d\rho dv_2. \end{aligned}$$

In the same way, we decompose $\mathcal{L}_{\Lambda_\alpha} = \mathcal{L}_{\Lambda_\alpha,1} + \mathcal{L}_{\Lambda_\alpha,2}$.

We begin by estimating the error terms $\mathcal{L}_{\mathcal{V},2}, \mathcal{L}_{\Lambda_\alpha,2}$.

Lemma 4.4.1

For $\psi \in C_b^2(\mathbb{R}^3)$ we have the estimate

$$(4.4.10) \quad \|\mathcal{L}_{\Lambda_\alpha,2} \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\mathcal{L}_{\mathcal{V},2} \psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C (\|\nabla \psi\| + \|\nabla^2 \psi\|) \alpha^{\frac{2(s-1)}{10}}.$$

Proof : Using (4.4.8) together with the simple identity

$$(4.4.11) \quad v_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} + \frac{|v_1 - v_2|}{2}\eta, \quad v_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} - \frac{|v_1 - v_2|}{2}\eta,$$

we obtain the estimate

$$\begin{aligned} & \left| \int_{S_\eta^1} (\psi(v'_1) + \psi(v'_2) - \psi(v_1) - \psi(v_2)) \, d\eta^\perp \right| \\ & \leq \left| \int_{S_\eta^1} 2\nabla\psi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) \cdot \frac{|v_1-v_2|}{2} \left(\sin\theta\eta^\perp + (1-\cos\theta)\eta\right) \, d\eta^\perp \right| \\ & \quad + 2\pi\|\nabla^2\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \frac{|v_1-v_2|^2}{8} (\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2) \\ & \leq C \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\|\nabla\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|v_1-v_2| + \|\nabla^2\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}|v_1-v_2|^2). \end{aligned}$$

Note that the last inequality follows from

$$(4.4.12) \quad 1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Inserting the estimate into the definition of $\mathcal{L}_{\mathcal{V},2}$ yields

$$\begin{aligned} & |\mathcal{L}_{\mathcal{V},2}\psi(v_1)| \\ & \leq C(\|\nabla\psi\|_{L^\infty} + \|\nabla^2\psi\|_{L^\infty}) \int_{\mathcal{P}_\alpha} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (|v_1-v_2|^2 + |v_1-v_2|^3) \rho M(v_2) dv_2 \, d\rho \\ & \leq C(\|\nabla\psi\|_{L^\infty} + \|\nabla^2\psi\|_{L^\infty}) \int_{\substack{|v_1-v_2| \leq 3\alpha^{\frac{s}{20}} \\ 2\rho < \alpha^{-\frac{1}{10}}} } (|v_1-v_2|^2 + |v_1-v_2|^3) \rho M(v_2) dv_2 \, d\rho \\ & \quad + C(\|\nabla\psi\|_{L^\infty} + \|\nabla^2\psi\|_{L^\infty}) \int_{\substack{|v_1-v_2|^2 \rho^s \leq 4 \\ 2\rho \geq \alpha^{-\frac{1}{10}}} } (|v_1-v_2|^2 + |v_1-v_2|^3) \rho M(v_2) dv_2 \, d\rho \\ & \quad + C(\|\nabla\psi\|_{L^\infty} + \|\nabla^2\psi\|_{L^\infty}) \int_{\substack{|v_1-v_2|^2 \rho^s \geq 4 \\ 2\rho \geq \alpha^{-\frac{1}{10}}} } \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (|v_1-v_2|^2 + |v_1-v_2|^3) \\ & \quad \quad \quad \times \rho M(v_2) dv_2 \, d\rho. \end{aligned}$$

The integrals appearing in the first two terms can be bounded by

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{|v_1-v_2| \leq 3\alpha^{\frac{s}{20}} \\ 2\rho < \alpha^{-\frac{1}{10}}} } (|v_1-v_2|^2 + |v_1-v_2|^3) \rho M(v_2) dv_2 \, d\rho \\ & \quad + \iint_{\substack{|v_1-v_2|^2 \rho^s \leq 4 \\ 2\rho \geq \alpha^{-\frac{1}{10}}} } (|v_1-v_2|^2 + |v_1-v_2|^3) \rho M(v_2) dv_2 \, d\rho \leq C\alpha^{(5s-4)/20}. \end{aligned}$$

It remains to estimate the third term. The estimate

$$(4.4.13) \quad \left| \kappa \int_0^1 \frac{\rho}{u} \mathcal{V}'\left(\frac{\rho}{u}\right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right| \leq \frac{C\kappa}{\rho^s},$$

together with (4.3.11) imply that for $\kappa = |v_1 - v_2|^{-2}$ and $K(\rho) < C/r^s$ we have

$$(4.4.14) \quad |\theta| \leq C(\kappa/\rho^s + \kappa^2/\rho^{2s}) \leq 6C\kappa/\rho^s.$$

This gives us the desired bound for the integral in the third term:

$$\iint_{\substack{v_2 \in \mathbb{R}^3 \\ \rho > \alpha^{-\frac{1}{10}}} } (|v_1 - v_2|^{-2} + |v_1 - v_2|^{-1}) \rho^{1-2s} M(v_2) d\rho \, dv_2 \leq C\alpha^{2(s-1)/10}.$$

Collecting all the estimates, we obtain the desired bound for $L_{\mathcal{V},2}\psi$

$$(4.4.15) \quad |\mathcal{L}_{\mathcal{V},2}\psi(v_1)| \leq C (\|\nabla\psi\| + \|\nabla^2\mathcal{V}\|) \alpha^{\frac{2(s-1)}{10}}.$$

The same estimation holds for $\mathcal{L}_{\Lambda_\alpha,2}$. ■

It remains to estimate the difference

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{\mathcal{V}_\alpha,1}\psi(v_1) - \mathcal{L}_{\mathcal{V},1}\psi(v_1) \\ &= \iint_{\mathcal{Q}_\alpha} \int_{S_\eta^1} (\psi(v'_{1,\alpha}) - \psi(v'_1) + \psi(v'_{2,\alpha}) - \psi(v'_2)) d\eta^\perp |v_1 - v_2| \rho M(v_2) dv_2 d\rho. \end{aligned}$$

We constructed the set \mathcal{Q}_α in such a way that we can directly compare the scattering problems associated to Λ_α and \mathcal{V} . The following Lemma shows the convergence of the deviation angles, i.e. $\theta_\alpha \rightarrow \theta$.

Lemma 4.4.2

For $(\rho, v_2) \in \mathcal{Q}_\alpha$, there exists a constant C independant of α such that

$$(4.4.16) \quad |\theta_\alpha - \theta| \leq C \left[\alpha^{3/10} + \min \left(1, \frac{\alpha^{4/10}}{\rho^{s-1}} \right) \right].$$

Proof : First note that θ and θ_α are in $[0, \pi]$, so we have the trivial bound $|\theta - \theta_\alpha| \leq \pi$. We now give a more precise bound. To this end, we introduce the functions F, F_α defined by

$$(4.4.17) \quad F(r) := 1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{4}{|v_1 - v_2|^2 r^s}, \quad F_\alpha(r) := 1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{4f(\alpha r)}{|v_1 - v_2|^2 r^s}.$$

We observe that both functions are strictly increasing and satisfy $F_\alpha \geq F$. Their asymptotic values are given by

$$(4.4.18) \quad \lim_{r \rightarrow 0} F(r) = \lim_{r \rightarrow 0} F_\alpha(r) = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} F_\alpha(r) = 1,$$

so they each have unique zeros r_0, r_α which satisfy $r_0 \geq r_\alpha$. In light of (4.3.8), we can express the difference $\theta_\alpha - \theta$ as

$$(4.4.19) \quad \theta_\alpha - \theta = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho}{r^2 \sqrt{F(r)}} dr - 2 \int_{r_\alpha}^{\infty} \frac{\rho}{r^2 \sqrt{F_\alpha(r)}} dr.$$

Step 1. On the set \mathcal{Q}_α we have

$$(4.4.20) \quad \alpha^{-\frac{1}{10}} > r_0 \geq r_\alpha.$$

Indeed, this follows by monotonicity and evaluating the functions for the value $\alpha^{-\frac{1}{10}}$:

$$(4.4.21) \quad F(\alpha^{-\frac{1}{10}}) \geq 1 - \frac{\alpha^{-\frac{2}{10}}}{4\alpha^{-\frac{2}{10}}} - \frac{4}{9\alpha^{\frac{2s}{20}}\alpha^{-\frac{s}{10}}} \geq \frac{1}{4} > 0.$$

Step 2. Let $h_\alpha \geq 0$ be such that $r_\alpha = r_0/(1 + h_\alpha)$. Then we have

$$(4.4.22) \quad h_\alpha \leq C\alpha^{\frac{9}{10}}.$$

In order to prove (4.4.22), we observe that by construction $F_\alpha\left(\frac{r_0}{1+h_\alpha}\right) = F(r_0) = 0$. This in turn implies

$$\left(\frac{\rho^2}{r_0^2} + \frac{4}{|v_1 - v_2|^2 r_0^s}\right) [(1+h_\alpha)^s - 1] = 4 \frac{1 - f\left(\frac{\alpha r_0}{1+h_\alpha}\right)}{|v_1 - v_2|^2 r_0^s} (1+h_\alpha)^s.$$

Since r_0 is a zero of F , and $(\rho, v_2) \in \mathcal{Q}_\alpha$ we obtain

$$(4.4.23) \quad \frac{(1+h_\alpha)^s - 1}{(1+h_\alpha)^s} \leq 4(1 - f\left(\frac{\alpha r_0}{1+h_\alpha}\right)).$$

Finally, $f(0) = 1$ and f is Lipschitz, therefore

$$\frac{(1+h_\alpha)^s - 1}{(1+h_\alpha)^{s-1}} \leq C\alpha r_0 \leq C\alpha^{\frac{9}{10}},$$

and the claim follows.

Step 3. There exists a constant $c > 0$ such that the following inequalities for F hold:

$$(4.4.24) \quad F(r) \geq \begin{cases} c\alpha^{\frac{6}{10}} & \text{for } r \geq r_0(1 + \alpha^{\frac{6}{10}}) \\ c & \text{for } r \geq 2r_0. \end{cases}$$

To prove this, we consider $k \geq \alpha^{\frac{6}{10}}$ and distinguish two cases:

— $s \leq 2$: Using $F(r_0) = 0$ we find for some $c > 0$:

$$\begin{aligned} F(r_0(1+k)) &= 1 - \frac{\rho^2}{r_0^2} \frac{1}{(1+k)^2} - \left(1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}\right) \frac{1}{(1+k)^s} \\ &= \frac{(1+k)^s - 1}{(1+k)^s} + \frac{\rho^2}{r_0^2} \frac{(1+k)^{2-s} - 1}{(1+k)^2} \\ &\geq \frac{(1+k)^s - 1}{(1+k)^s}. \end{aligned}$$

— $s > 2$: similarly, we can estimate

$$\begin{aligned} F(r_0(1+k)) &= 1 - \left(1 - \frac{4}{|v_1 - v_2|^2 r_0^s}\right) \frac{1}{(1+k)^2} - \frac{4}{|v_1 - v_2|^2 r_0^s} \frac{1}{(1+k)^s} \\ &= \frac{(1+k)^2 - 1}{(1+k)^2} + \frac{4}{|v_1 - v_2|^2 r_0^s} \frac{(1+k)^{s-2} - 1}{(1+k)^s} \\ &\geq \frac{(1+k)^2 - 1}{(1+k)^2}. \end{aligned}$$

Combining the two estimates we deduce (4.4.24).

Step 4. For some $c > 0$ independent of α , F and F_α satisfy:

$$(4.4.25) \quad \begin{aligned} F(r) &\geq c \frac{r - r_0}{r_0} && \text{for } r \in (r_0, (1 + \alpha^{\frac{6}{10}} r_0)), \\ F_\alpha(r) &\geq c \frac{r - r_\alpha}{r_\alpha} && \text{for } r \in (r_\alpha, (1 + \alpha^{\frac{6}{10}} r_\alpha)). \end{aligned}$$

We note that, in light of Step 1, $\alpha r \leq \alpha^{9/10}$ and thus $f(\alpha r) > 1/2$ for α small enough. We then compute the derivatives of F and F_α respectively:

$$(4.4.26) \quad F'(r) = \frac{1}{r} \left(2\frac{\rho^2}{r^2} + s \frac{4}{|v_1 - v_2|^2 r^s} \right),$$

$$(4.4.27) \quad F_\alpha(r) = \frac{1}{r} \left(2\frac{\rho^2}{r^2} + s \frac{4f(\alpha r)}{|v_1 - v_2|^2 r^s} + \frac{4\alpha f'(\alpha r)}{|v_1 - v_2|^2 r^{s-1}} \right).$$

Using the boundedness of f' , for $\alpha > 0$ small enough we have the lower bound

$$(4.4.28) \quad F_\alpha(r) \geq \frac{1}{2r} \left(2\frac{\rho^2}{r^2} + s \frac{4f(\alpha r)}{|v_1 - v_2|^{2r^s}} \right).$$

Moreover, on the domains in (4.4.25) we have respectively

$$(4.4.29) \quad r_0 \leq r \leq 2r_0, \quad r_\alpha \leq r \leq 2r_\alpha,$$

so we can conclude

$$(4.4.30) \quad F'(r) \geq \frac{c}{r_0}, \quad F'_\alpha(r) \geq \frac{c}{r_\alpha},$$

and the statement follows.

Step 5. We can now estimate $\theta_\alpha - \theta$. Starting from the representation (4.3.8), we decompose

$$\theta_\alpha - \pi = -2 \int_{r_\alpha}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{F_\alpha(r)}} = -2 \left(\int_{r_\alpha}^{(1+\alpha^{6/10})r_0} + \int_{(1+\alpha^{6/10})r_0}^{\infty} \right) \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{F_\alpha(r)}}.$$

Using Step 2 and Step 4 and $\rho < r_\alpha$, we get the following bound for the first term:

$$(4.4.31) \quad \int_{r_\alpha}^{(1+\alpha^{6/10})r_0} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{F_\alpha(r)}} \leq \int_{r_\alpha}^{(1+\alpha^{6/10})r_0} \frac{\rho dr}{r_\alpha^2 \sqrt{C \frac{r-r_\alpha}{r_\alpha}}} \\ \leq \frac{C\rho}{r_\alpha} \sqrt{\frac{(1+\alpha^{6/10})r_0 - r_\alpha}{r_\alpha}} \leq C\alpha^{3/10}.$$

The analogous estimate holds for θ and therefore

$$|\theta - \theta_\alpha| \leq C\alpha^{\frac{3}{10}} + \int_{(1+\alpha^{6/10})r_0}^{\infty} \left| F_\alpha(r)^{-\frac{1}{2}} - F(r)^{-\frac{1}{2}} \right| \frac{\rho dr}{r^2} \\ \leq C\alpha^{\frac{3}{10}} + \int_{(1+\alpha^{6/10})r_0}^{\infty} \frac{1-f(\alpha r)}{2r^s F(r)} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{F(r)}} \\ \leq C\alpha^{\frac{3}{10}} + C \frac{\alpha^{4/10}}{r_0^{s-1}} \int_{(1+\alpha^{6/10})r_0}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{F(r)}} \\ \leq C \left(\alpha^{\frac{3}{10}} + \frac{\alpha^{4/10}}{\rho^{s-1}} \right).$$

Here we have used Step 3 and the Lipschitz-continuity of f . ■

Lemma 4.4.3

There exist constants $\beta, C > 0$ depending only on s such that

$$(4.4.32) \quad |\mathcal{L}_{\Lambda_\alpha, 1}\psi(v_1) - \mathcal{L}_{\mathcal{V}, 1}\psi(v_1)| \leq C (\|\nabla_v \psi\| + \|\nabla^2 \psi\|) (1 + |v_1|^3) \alpha^\beta.$$

Proof : We start by recalling that for $i = 1, 2$ we have

$$v'_{i,\alpha} - v'_i = (-1)^i \frac{|v_1 - v_2|}{2} ((\sin \theta - \sin \theta_\alpha)\eta + (\cos \theta - \cos \theta_\alpha)\eta^\perp).$$

This allows us to obtain an estimate in terms of the difference of deviation angles:

$$(4.4.33) \quad \left| \int_{S_\eta^1} (\psi(v'_{1,\alpha}) - \psi(v'_1) + \psi(v'_{2,\alpha}) - \psi(v'_2)) d\eta^\perp \right| \leq C |\sin(\frac{\theta - \theta_\alpha}{2})| \|\nabla\psi\| |v_1 - v_2|.$$

We insert the estimate (4.4.16) for the deviation angles into (4.4.33), and find

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{L}_{\Lambda_\alpha,1}\psi(v_1) - \mathcal{L}_{\mathcal{V},1}\psi(v_1) \right| \\ & \leq C_\psi \iint_{\mathcal{Q}_\alpha} (|v_1 - v_2|^2 + |v_1 - v_2|^3) \left(\alpha^{\frac{3}{10}} + \min\left(1, \frac{\alpha^{4/10}}{\rho^{s-1}}\right) \right) M(v_2) \rho d\rho dv_2 \\ & \leq C_\psi (1 + |v_1|^3) \left(\alpha^{\frac{1}{10}} + \int_0^{\alpha^{-\frac{1}{10}}} \min\left(1, \frac{\alpha^{4/10}}{\rho^{s-1}}\right) \rho d\rho \right). \end{aligned}$$

The claim now quickly follows by distinguishing the cases $s > 3$, $s = 3$ and $s < 3$

— For $s > 3$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha^{-\frac{1}{10}}} \min\left(1, \frac{\alpha^{4/10}}{\rho^{s-1}}\right) \rho d\rho & \leq \int_0^{\alpha^{\frac{4}{10(s-1)}}} \rho + \int_{\alpha^{\frac{4}{10(s-1)}}}^\infty \frac{\alpha^{4/10} d\rho}{\rho^{s-2}} \\ & \leq \frac{\alpha^{\frac{8}{10(s-1)}}}{2} + \frac{\alpha^{\frac{4}{10}(1-\frac{s-3}{s-1})}}{s-3} \leq C\alpha^{\frac{4}{10(s-1)}}. \end{aligned}$$

— In the same way for $s = 3$,

$$\int_0^{\alpha^{-\frac{1}{10}}} \min\left(1, \frac{\alpha^{4/10}}{\rho^{s-1}}\right) \rho d\rho \leq C\alpha^{\frac{4}{10(s-1)}} |\log \alpha|.$$

— For $s < 3$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha^{-\frac{1}{10}}} \min\left(1, \frac{\alpha^{4/10}}{\rho^{s-1}}\right) \rho d\rho & \leq \int_0^{\alpha^{\frac{4}{10(s-1)}}} \rho + \int_{\alpha^{\frac{4}{10(s-1)}}}^\infty \frac{\alpha^{4/10} d\rho}{\rho^{s-2}} \\ & \leq \frac{\alpha^{\frac{4}{10} - \frac{3-s}{10}}}{3-s} \leq C\alpha^{\frac{1}{10}}. \end{aligned}$$

Collecting the three estimates concludes the proof. ■

The proof of Theorem 4.2.4 is now straightforward. We recall

$$(4.4.34) \quad (\mathcal{L}_{\Lambda_\alpha} - \mathcal{L}_{\mathcal{V}})\psi = (\mathcal{L}_{\Lambda_\alpha,1} - \mathcal{L}_{\mathcal{V},1})\psi + (\mathcal{L}_{\Lambda_\alpha,2} - \mathcal{L}_{\mathcal{V},2})\psi$$

and apply Lemma 4.4.3 and Lemma 4.4.1. ■

Chapter 5

Long time validity of the linearized Boltzmann equation for hard spheres: a proof without billiard theory

5.1 Introduction

Consider a system of N classical particles in a box $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 3$), interacting by means of a two-body potential $\mathcal{V}_\varepsilon(\cdot) := \mathcal{V}(\cdot/\varepsilon)$. We are interested in the behavior of the system as the number of particles goes to infinity and the interaction length scale ε is fixed by the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$. It is a limit of low density where the mean free path of a particle between two collisions is of order $O(1)$.

Away from equilibrium, it is expected that the system is governed by the Boltzmann equation in the low density limit. However most of the existing rigorous results are valid for short time, such that only a small fraction of the particles actually interact. The first convergence proofs were provided in the fundamental work of Lanford [Lan75] for hard spheres and by King [Kin75] for different finite range potentials (see also [CIP94, Spo91]). Quantitative convergence bounds have been obtained later on (see [GSRT13, PSS14]).

Illner and Pulvirenti proved a first long time convergence result in [IP89] (see also [Den18]), but only for a very diluted gas in the whole space, where dispersion is the dominant phenomena. Other long time results have been obtained later on for a system of one labeled particle evolving in a background at equilibrium (see [LLSvB80] for arbitrary kinetic times and [BGSr16] for diffusive times). The law of the tagged particle follows then the linear Boltzmann equation. See also [Ayi17, Cat18] for adaptations of the proof to interaction potentials different from hard core.

Looking at a tagged particle in a background at equilibrium can be seen as a perturbation of order $O(1)$ of the equilibrium measure. The next natural step is to study small fluctuations around equilibrium which can be seen as perturbations of order $O(N)$ (we are interested in the square of the small fluctuations). Note that a reasonable "final step" would be to understand on long time non equilibrium chaotic measures which are $O(C^N)$ perturbations.

In the low density limit, the fluctuations behave like a Gaussian field with covariance governed by the linearized Boltzmann equation, as predicted in [Spo81, Spo83]. The rigorous proof is separated in two main parts: first the convergence of the covariance and second checking asymptotically the Wick's rules characterizing the higher order moments; treated

first for short times, respectively in [Spo81], and [BGSRS20b, BGSRS20a] in the more general context of non equilibrium states. Concerning the global in time result, the Wick's rule has been treated recently in the case of hard spheres in [BGSRS22]. Convergence of the covariance has been obtained first for hard disks in dimension 2 in the canonical ensemble (see [BGSRS17]), using that the partition function is uniformly bounded (in ε), which is a specificity of dimension 2. Later on a proof has been given for dimension 3 in [BGSRS21], in the grand canonical ensemble.

The purpose of the present work is to propose a different method of proof for the result in [BGSRS21]. As known, a crucial part of the argument leading to the Boltzmann equation amounts to showing that dynamical memory effects (called recollisions) are vanishing in the limit. The long time result is based then on a sampling checking the trajectories carefully and eliminating the recollisions on very small time scales (of order δ , a power of ε). On these scales, it is used in [BGSRS21] that the dynamics is decomposed on independent clusters of finite size, each of which behaves as a dispersing billiard with uniformly bounded number of collisions. The latter property is unproved (possibly false) for arbitrary potentials with compact support (defining, say, a collision as a two-by-two interaction at distance ε). Even in the case of hard spheres, the property is delicate: explicit bounds have been provided in [BFK98] by means of refined geometric techniques.

This motivates us to develop a different argument circumventing any uniform control on recollision numbers. The main ingredients are a subtle conditioning of the initial data forbidding explosions of the number of recollisions, together with a suitable dynamical cumulant decomposition method, inspired by [BGSRS20a].

5.1.1 Definition of the system

Let $\Lambda := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ (with $d \geq 3$) be the domain. We denote $\mathbb{D} = \Lambda \times \mathbb{R}^d$ its tangent bundle and $\mathcal{D}_\varepsilon^n \subset \mathbb{D}^n$ the n -particle canonical phase space:

$$(5.1.1) \quad \mathcal{D}_\varepsilon^n := \left\{ Z_n := (x_1, v_1, \dots, x_n, v_n) \in \mathbb{D}^n, \text{ for } 1 \leq i < j \leq n, |x_i - x_j| > \varepsilon \right\}.$$

Here and in the following, we use the notation

$$X_n = (x_1, \dots, x_n), \quad V_n = (v_1, \dots, v_n), \quad \text{and } z_i = (x_i, v_i).$$

On each $\mathcal{D}_\varepsilon^n$ we construct the hard sphere dynamics as the Hamiltonian dynamics associated with the Hamiltonian

$$(5.1.2) \quad \mathcal{H}_n^\varepsilon(Z_n) := \frac{1}{2} |V_n|^2 + \mathcal{V}_n^\varepsilon(X_n), \quad \mathcal{V}_n^\varepsilon(X_n) := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{V} \left(\frac{|x_i - x_j|}{\varepsilon} \right)$$

where \mathcal{V} is the hard core interaction potential

$$(5.1.3) \quad \mathcal{V}(r) := \begin{cases} 0 & \text{if } |r| > 1 \\ \infty & \text{else} \end{cases}.$$

In this dynamics particles move along straight lines until they meet each other. If at time τ we have $|x_q(\tau) - x_{q'}(\tau)| = \varepsilon$, the outgoing velocities are given by the following scattering law:

$$(5.1.4) \quad \begin{cases} v_q(\tau^+) &= v_q(\tau^-) - \frac{x_{q'}(\tau) - x_q(\tau)}{|x_{q'}(\tau) - x_q(\tau)|} \cdot \left(v_q(\tau^-) - v_{q'}(\tau^-) \right) \frac{x_{q'}(\tau) - x_q(\tau)}{|x_{q'}(\tau) - x_q(\tau)|} \\ v_{q'}(\tau^+) &= v_{q'}(\tau^-) + \frac{x_{q'}(\tau) - x_q(\tau)}{|x_{q'}(\tau) - x_q(\tau)|} \cdot \left(v_q(\tau^-) - v_{q'}(\tau^-) \right) \frac{x_{q'}(\tau) - x_q(\tau)}{|x_{q'}(\tau) - x_q(\tau)|}. \end{cases}$$

This process is well defined for all times, almost everywhere in $\mathcal{D}_\varepsilon^n$ with respect to the Lebesgue measure (see [Ale75]).

We denote in the following $\mathcal{D}_\varepsilon := \bigsqcup_{n \geq 0} \mathcal{D}_\varepsilon^n$ the grand canonical phase space and \mathcal{N} the random number of particles. We can then extend the Hamiltonian dynamics to \mathcal{D}_ε and denote $\mathbf{Z}_\mathcal{N}(t)$ the realization (defined almost surely) of the hard sphere flow on \mathcal{D}_ε with random initial data $\mathbf{Z}_\mathcal{N}(0)$: for $\mathcal{N} = n$, $\mathbf{Z}_\mathcal{N}(t)$ follows the Hamiltonian dynamics on $\mathcal{D}_\varepsilon^n$.

The initial data is sampled according to the stationary measure introduced next. The *grand canonical Gibbs measure* \mathbb{P}_ε (and its expectation \mathbb{E}_ε) are defined on \mathcal{D}_ε as follows. An application $G : \mathcal{D}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ is a test function if there exists a sequence $(g_n)_{n \geq 0}$ with $g_n \in L^\infty(\mathbb{D}^n)$ and

$$\text{for } \mathcal{N} = n, G(\mathbf{Z}_\mathcal{N}) := g_n(\mathbf{Z}_\mathcal{N}).$$

Then we define \mathbb{E}_ε as

$$(5.1.5) \quad \mathbb{E}_\varepsilon[G(\mathbf{Z}_\mathcal{N})] := \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{n \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^n}{n!} \int_{\mathbb{D}^n} g_n(Z_n) \frac{e^{-\mathcal{H}_n^\varepsilon(Z_n)}}{(2\pi)^{nd/2}} dZ_n,$$

where \mathcal{Z}_ε is a normalisation constant and μ_ε is tuned to respect the Boltzmann-Grad scaling $\mu_\varepsilon \varepsilon^{d-1} = 1$.

The empirical distribution at time t is defined as the average configuration of particles at time t : for g some test function on \mathbb{D} ,

$$(5.1.6) \quad \pi_t^\varepsilon(g) := \frac{1}{\mu_\varepsilon} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} g(\mathbf{z}_i(t)).$$

At equilibrium, we have the following law of large numbers. Denote

$$(5.1.7) \quad M(v) := (2\pi)^{-d/2} e^{-|v|^2/2}.$$

Theorem 5.1.1

For any continuous and bounded test function $g : \Lambda \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, for all $t \in \mathbb{R}$ and for any $a > 0$,

$$(5.1.8) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_\varepsilon \left[\left| \pi_t^\varepsilon(g) - \int g(z) M(v) dz \right| \geq a \right] = 0.$$

Remark 5.1.1

The previous result is a simple corollary of the Lanford's theorem and of the invariance of the measure (see [Lan75]).

5.1.2 Convergence to the linearized Boltzmann equation

The aim of this article is to investigate the next order, namely the fluctuation field

$$(5.1.9) \quad \zeta_\varepsilon^t(g) := \mu_\varepsilon^{1/2} \left(\frac{1}{\mu_\varepsilon} \sum_{1 \leq i \leq \mathcal{N}} g(\mathbf{z}_i(t)) - \mathbb{E}_\varepsilon[\pi_0^\varepsilon(g)] \right).$$

When ε tends to 0, collisions become rare and we expect that particles can see each other only a finite number of times in any bounded time interval. We define the linearized Boltzmann operator as

$$(5.1.10) \quad \mathcal{L}g(v) := \int_{\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^d} (g(v') + g(v'_*) - g(v) - g(v_*)) ((v - v_*) \cdot \eta)_+ M(v_*) d\eta dv_*,$$

where (v', v'_*) are given by the scattering of (v, v_*, η)

$$(5.1.11) \quad \begin{cases} v' & := v - \eta \cdot (v - v_*)\eta \\ v'_* & := v_* + \eta \cdot (v - v_*)\eta. \end{cases}$$

This operator describes the variation of mass due to changes of velocity of colliding particles. The operator \mathcal{L} is a self-adjoint negative operator on $L^2(M(v)dz)$. We want to prove the following result

Theorem 5.1.2

Let $f, g \in L^2(M(v)dz)$ be two test functions. Then we have the following convergence result: for all $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^t(h)\zeta_\varepsilon^0(g)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle h, e^{t(-v \cdot \nabla_x + \mathcal{L})}g \rangle$$

where \langle, \rangle is the Hermitian product on $L^2(M(v)dz)$.

Since the two bilinear operators

$$(h, g) \mapsto \mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^t(h)\zeta_\varepsilon^0(g)], \quad (h, g) \mapsto \langle h, e^{t(-v \cdot \nabla_x + \mathcal{L})}g \rangle$$

are both continuous on $L^2(M(v)dz)$ (see [BGSR21]), it sufficient to prove Theorem 5.1.2 in a dense subset. This also allows to have a quantitative version of the theorem, which we state for completeness.

We define for g smooth the norm

$$(5.1.12) \quad \|g\| := \sup_{(x,v) \in \mathbb{D}} |M^{-1}(v)g(x, v)|$$

and we consider test functions g such that

$$(5.1.13) \quad \|g\| + \|\nabla_x g\| < \infty.$$

Theorem 5.1.3

Let g and h two $C^1(\mathbb{D})$ functions satisfying condition (5.1.13). Then there exist three constants $C > 1$, $C' > 1$ and $\alpha \in (0, 1)$ independent of g, h such that for any ε small enough, $T > 1$, $\theta < \frac{1}{C'T^2}$

$$(5.1.14) \quad \sup_{t \in [0, T]} \left| \mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^t(h)\zeta_\varepsilon^0(g)] - \langle h, e^{t(-v \cdot \nabla_x + \mathcal{L})}g \rangle \right| \leq C \left(CT^{3/2}\theta^{1/2} + (CT)^{2T/\theta} \varepsilon^\alpha \right) \|h\| (\|g\| + \|\nabla_x g\|).$$

In particular we can choose $T = o((\log |\log \varepsilon|)^{1/3})$ and $\theta = \frac{1}{\beta \log |\log \varepsilon|}$, $\beta \in (0, 1)$ small enough.

Notations. From now on we will use the following notations.

We denote for $m < n$ two integers, $[m, n] := \{m, m+1, \dots, n\}$ and $[n] := [1, n]$.

For $Z_n \in \mathbb{D}^n$, and $\omega \subset [n]$, we denote

$$Z_\omega := (z_{\omega(1)}, \dots, z_{\omega(|\omega|)})$$

where $\omega(i)$ is the i -th element of ω counted in increasing order. For $1 \leq l < m \leq n$, $Z_{l,m} := Z_{[l,m]}$.

Given a family of particles indices $\{i_1, \dots, i_n\}$, the notation (i_1, \dots, i_n) indicates the ordered sequence in which $\forall k \neq l, i_k \neq i_l$. In addition

- $\underline{i}_n := (i_1, \dots, i_n)$,
- for $m \leq n$, $\underline{i}_m = (i_1, \dots, i_m)$, and more generally for $\omega \subset [1, n]$, $\underline{i}_\omega := (i_{\min \omega}, \dots, i_{\max \omega})$,
- for $0 \leq m < n$ and (i_1, \dots, i_m) , $\sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)}$ denotes the sum over every family such that for $k < l \leq n$, $i_k \neq i_l$,
- $\mathbf{Z}_{\underline{i}_n} := (z_{i_1}, \dots, z_{i_n})$, as ordered sequence.

We also precise the sense of Landau notation: $A = B + O(D)$ means that there exists a constant C depending only on the dimension such that $|A - B| < CD$.

Finally let h_n be a function on \mathbb{D}^n . We denote

$$\mathbb{E}_\varepsilon[h_n] := \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\mu_\varepsilon^n} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} h_n(\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}) \right]$$

and the associated truncated function defined on \mathcal{D}_ε

$$\hat{h}_n(\mathbf{Z}_\mathcal{N}) := \frac{1}{\mu_\varepsilon^n} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} h_n(\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}) - \mathbb{E}_\varepsilon[h_n].$$

5.1.3 Strategy of the proof

We explain now the main ideas of the proof and of the improvement with respect to [BGSRS21].

Because $\zeta_\varepsilon^t(g)$ is a centered random variable,

$$(5.1.15) \quad \mathbb{E}_\varepsilon[\zeta_\varepsilon^t(h)\zeta_\varepsilon^0(g)] = \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} h(z_i(t)) \zeta_\varepsilon^0(g) \right].$$

The first step is to find a family of functionals $\Phi_{\varepsilon, n}^t : L^\infty(\mathbb{D}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{D}^n)$ corresponding to the pullback of the test function h at time 0

$$(5.1.16) \quad \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} h(z_i(t)) \zeta_\varepsilon^0(g) \right] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \Phi_{\varepsilon, n}^t[h](\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}(0)) \zeta_\varepsilon^0(g) \right].$$

It turns out that the $\Phi_{\varepsilon, n}^t[h]$ are a sum over *histories*. Loosely speaking, a history is defined as a way to remove (or not) particles at each collision, so that at time t there remains only one particle (see the picture below). Then

$$(5.1.17) \quad \Phi_{\varepsilon, n}^t[h](Z_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\text{history}} h(z_k(t)) \mathbb{1}_{\text{history}} \sigma_{\text{history}}$$

where $\sigma_{\text{history}} = \pm 1$ and $z_k(t)$ is the position of the last particle k (k depends of the history). This formula will be explained precisely in section 5.2. For the moment, we mention that the signs σ_{history} are related to a splitting of collision operators into a positive and negative part (as in (5.1.10)).

The classical method to prove convergence of a hard sphere system to the Boltzmann equation (and here to the linearized equation) amounts to show that each term of the sum (5.1.16) converges to its formal limit. This is the the way we compare the hard sphere process with the limit punctual process. In this procedure, it is natural to separate a principal part containing a controlled number of collisions, from some rest terms encoding ill-behaved trajectories (for instance trajectories with more than $n - 1$ collisions, which do not have a counterpart in the limit process).

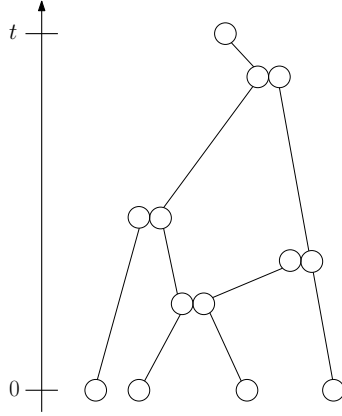


Figure 5.1 – Example of history for four particles.

For the argument to be rigorous, we then need a bound on the rest terms of the sum. In usual derivations of the Boltzmann equation (see for instance [Lan75, Kin75, GSRT13, BGSR16, PSS14]) one resorts to L^∞ bounds and to a dual representation of the sum (5.1.16). In contrast here we rely on the above pullback formula, together with suitable stopping times t_s truncating the formula when the number of histories becomes uncontrolled. To implement this idea it is convenient to consider L^2 bounds as in [BGSR17, BGSR21]. Indeed (using notation introduced at the end of the previous section), because $\zeta_\varepsilon^0(g)$ is centered

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\sum_{i_n} \Phi_{\varepsilon,n}^{t-t_s}[h](\mathbf{Z}_{i_n}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \right] \right| &\leq \mathbb{E}_\varepsilon \left[\left(\mu_\varepsilon^n \widehat{\Phi}_{\varepsilon,n}^{t-t_s}[h](\mathbf{Z}_{i_n}(t_s)) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^0(g)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\equiv \mathbb{E}_\varepsilon \left[\left(\mu_\varepsilon^n \widehat{\Phi}_{\varepsilon,n}^{t-t_s}[h](\mathbf{Z}_{i_n}(0)) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^0(g)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

using Cauchy-Schwarz and the invariance of the Gibbs measure. By virtue of such estimates, we do not need to take into account what happens for pathological histories before t_s .

Unfortunately, in the bound for $\Phi_{\varepsilon,n}^t[h]$, we do not know how to take into account the cancellations due to the signs in σ_{history} . Thus we have to count the number of possible histories and collisions. We then need to distinguish two kinds of collisions: those where one particle is removed, and those where both particles are kept, called *recollisions*. The second type is harder to control.

We need two different samplings to control each type of collision separately. The sampling method (already used in [BGSR21]) is an adaptation of [BGSR16, BGSR17] (and reminiscent of [Erd12] in the context of the quantum Lorentz gas).

The first sampling has a relative large step $\theta = 1/\beta \log |\log \varepsilon|$ (with $\beta \in (0, 1)$ set later) and enables to control a moderate growth of collisions with removal. This will be the source of the slow speed of convergence in (5.1.14).

The second sampling, which has a shorter step $\delta = \varepsilon^{\beta'}$ (with $\beta' \in (0, 1)$ set later) is used to control possibly many recollisions on the short time scale. These collisions will be allowed only on the last time interval $[t_s, t_s + \delta]$.

In the present paper, two conditionings on initial data are used, to deal with the recollision problem. The first one is symmetric on all the particles and forbids a group of more than a fixed integer $\gamma > 0$ to interact altogether on each small time interval $[k\delta, (k+1)\delta]$ (for $k \in \mathbb{N}$). Once applied this conditioning on the invariant measure, the

paper [BGRS21] uses the billiard theory developed in [BFK98] to control the number of histories in clusters of γ particles. Notice that such result has no known analogue for different interaction potentials, even with compact support.

The main goal of this paper is to avoid the latter geometrical argument, as explained next.

Let us define the collision graph of a trajectory on a time interval $[\tau, \tau']$ as the graph where the vertices are the set of particles and to each collision happening on $[\tau, \tau']$ corresponds an edge between the colliding particles. A trajectory on the time interval $[t_s, t]$ is said *non-pathological* (see the figure) if

- its collision graph restricted to $[t_s + \delta, t]$ is a tree (at each collision, one particle is removed),
- on $[t_s, t_s + \delta]$ the collision graph has no cycle (but there can be recollisions).

Due to the symmetric conditioning, one particle can meet at most γ other particles on $[t_s, t_s + \delta]$, and thus there are less than γ recollisions per particle. Therefore the number of non-pathological trajectories and corresponding recollisions is controlled by construction.

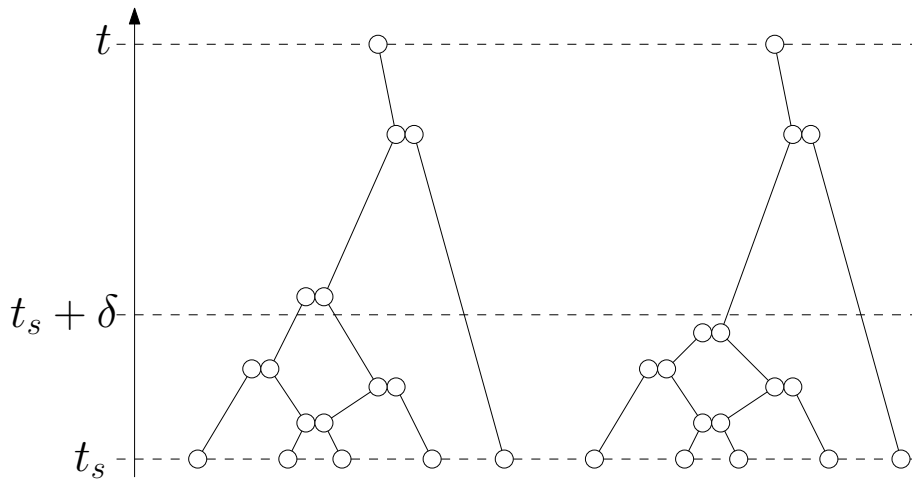


Figure 5.2 – An example of one non-pathological trajectory (on the left) and a pathological one (on the right).

We then introduce a second conditioning forbidding pathological trajectories. One difficulty is that this conditioning will introduce asymmetry. Since there are approximately μ_ε particles in the system, choosing one particle costs roughly μ_ε and in a symmetric conditioning the choice of k particles would cost μ_ε^k . But the sum $\sum_{i_n} \Phi_{\varepsilon, n}[h](\mathbf{Z}_{i_n})$ is already a sum over n chosen particles, and for each term of this sum we are interested in particles of the “background” which can influence the n selected particles. Hence, it is sufficient to impose an asymmetric conditioning where in the set of k particles producing a pathology, the first one is chosen first in i_n , and then the $k - 1$ other particles are chosen in the whole set of particles. Such procedure will provide a gain of μ_ε^{-1} which turns out to be enough to control the error term, by means of a cumulant expansion.

We conclude by describing better the asymmetric conditioning, which is the main novel tool of this paper. Let $\chi(\mathbf{Z}_r)$ be the indicator function which takes value 1 if there exist history parameters such that the graph on $[t_s, t_s + \delta]$ with initial data \mathbf{Z}_r at time t_s has a cycle and is connected. Because the indicator function involves a bounded number of particles, its weight $\|\chi(\mathbf{Z}_r)\|_{L^1}$ is small. We then introduce an asymmetric conditioning $\mathcal{X}_{i_n}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s))$ imposing the existence of a set of particles ω containing at least one particle of $\{i_1, \dots, i_n\}$ such that $\chi(\mathbf{Z}_\omega(t_s))$ is equal to 1, *id est* one trajectory containing a particle of i_n is pathological.

Let us give an idea of how to bound $\mathcal{X}_{i_n}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s))$. We develop the constraint over finite numbers of background variables

$$\mathcal{X}_{i_n}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)) = \sum_{p \geq n} \sum_{(i_{n+1}, \dots, i_p)} \mathfrak{X}_{n,p}(\mathbf{Z}_{i_p}(t_s)).$$

The $\mathfrak{X}_{n,p}(\mathbf{Z}_{i_p}(t_s))$ can be expressed as sums over families of particles $(\omega_1, \dots, \omega_k)$, where ω_i is a subset of i_p , of terms

$$(-\chi(\mathbf{Z}_{\omega_1}(t_s)))(-\chi(\mathbf{Z}_{\omega_2}(t_s))) \cdots (-\chi(\mathbf{Z}_{\omega_k}(t_s))).$$

The ω_i can intersect, hence the number of terms in $\mathfrak{X}_{n,p}$ is huge. But the (first) symmetric conditioning permits to bound the number of intersecting sets. If $\omega_1, \dots, \omega_k$ intersect, all the particles in their union are close. Hence the size of $\omega_1 \cup \dots \cup \omega_k$ is bounded by γ and k is smaller than 2^γ . This is sufficient to bound $\mathfrak{X}_{n,p}$.

The paper is organized as follows. In section 5.2 we give a proper definition of history and we use it to construct the functionals $\Phi_{\varepsilon,n}^t$. Then the two samplings mentioned above are implemented, and the conditionings applied. This allows to decompose $\mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^t(h)\zeta_\varepsilon^0(g)]$ into a main term, plus error terms of different nature: a development on trajectories (actually called below pseudotrajectories) (i) without recollisions (bounded in Section 5.4), (ii) with non-pathological recollisions (bounded in section 5.5) and (iii) with pathological recollisions (bounded in Section 5.6). The estimation of the error terms requires standard $L^2(\mathbb{P}_\varepsilon)$ estimates based on static cumulant decompositions, which are reported in Section 5.3. Finally, the convergence of the main term is proved in Section 5.7.

5.2 Development along pseudotrajectories and time sampling

5.2.1 Definition of (forward) pseudotrajectories

Consider n particles. To lighten notation for pseudotrajectories (called ‘‘histories’’ in the introduction), we will drop their dependence on ε .

For $m \leq n$, fix a family of *pseudotrajectory parameters*

$$((s_i, \bar{s}_i)_{1 \leq i \leq n-m}, (\kappa_j)_{1 \leq j \leq n}) \in \{(\pm 1, \pm 1)\}^{n-m} \times \mathbb{N}^n,$$

and an initial data $Z_n \in \mathcal{D}_\varepsilon^n$.

We construct iteratively the pseudotrajectories $Z_n(\tau, ((s_i, \bar{s}_i)_{1 \leq i \leq n-m}, (\kappa_j)_{1 \leq j \leq n}), Z_n)$, the collision indices $\iota(\tau)$ and recollision indices $(\kappa_j(\tau))_{1 \leq j \leq n}$. At time $\tau = 0$, we set $\iota(0) := 1$ and for all j , $\kappa_j(0) := \kappa_j$. Moreover at $\tau = 0$, $Z_n(0) = Z_n \in \mathcal{D}_\varepsilon^n$. The number of particles decreases with time and is equal to $(n + 1 - \iota(\tau))$.

If $\iota(\tau) < n - m + 1$, the remaining particles move freely along straight lines, until there is a new collision between two of them at time τ , say q and q' with $q < q'$. If $s_{\iota(\tau^-)} = 1$ (respectively -1), we look at $\kappa_q(\tau^-)$ (respectively $\kappa_{q'}(\tau^-)$):

- if it is strictly positive, we have a *recollision*. The two particles scatter as in (5.1.4) and $\kappa_q(\tau^+) = \kappa_q(\tau^-) - 1$ (respectively $\kappa_{q'}(\tau^+) = \kappa_{q'}(\tau^-) - 1$),
- if it is 0 we have an *annihilation*: we remove the particle q (in the case where $s_{\iota(\tau^-)} = -1$, we remove q'). The other particle q' (respectively q) scatters if $\bar{s}_{\iota(\tau^-)} = 1$ or continues freely along straight line else.

Finally we increment $\iota(\tau)$.

When $\iota(\tau) = n - m + 1$ (there are m particles left), all the annihilations have been performed and the remaining particles evolve according to the Hamiltonian flow.

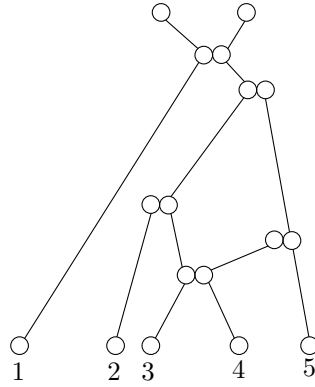


Figure 5.3 – Pseudotrajectory associated with $((1, -1), (1, 1), (-1, 1)), (0, 0, 1, 0, 0)$.

Let ω be a finite subset of \mathbb{N}^* . We will denote $Z_\omega(t, Z_\omega, ((s_i, \bar{s}_i)_{i \leq |\omega| - m}, (\kappa_j)_{j \in \omega}))$ the pseudotrajectory with particles of ω and $Z_\omega(t)$ when there is no ambiguity on the parameters. Note that this should not be confused with $Z_\omega(t)$, the configuration of the particles ω in the realization of the hard sphere flow over \mathcal{D}_ε (the “real trajectories”).

Definition 5.2.1 (Collision graph)

Given $Z_r \in \mathcal{D}_\varepsilon^r$ and parameters $((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j)_j)$, we construct the collision graph $\mathcal{G}_r^{[0,t]}$ as the couple (E, V) , with $V := \{1, \dots, r\}$ and

$$E \subset \{(i, j)_\tau, \text{ where } (i, j) \in V^2, i < j, \tau \in [0, t]\}$$

such that $(i, j)_\tau \in E$ if and only if there is a collision at time τ in the pseudotrajectory between particle i and j . It is an unoriented graph where the edges are labeled by the collision times.

By well known properties of the hard sphere dynamics (see [Ale75]), for almost all Z_r , $\mathcal{G}_r^{[0,t]}$ has a finite number of edges. We can order $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$ the collision times of $\mathcal{G}_r^{[0,t]}$.

In the following we possibly denote $E(\mathcal{G}_r^{[0,t]}) := E$.

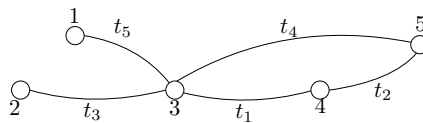


Figure 5.4 – Collision graph associated with the pseudotrajectory of Figure 5.3, with $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$ the collision times.

5.2.2 Development along pseudotrajectories

The pseudotrajectories are used to pull back a function evaluated at time t , up to a previous time 0.

Let $m \leq n$ be two integers, and $((s_i, \bar{s}_i)_{1 \leq i \leq n - m}, (\kappa_j)_{1 \leq j \leq n})$ be collision parameters and $t > 0$ the finite time. In order not to count twice the same pseudotrajectory, all parameters have to be taken into account. We define $\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))}^{m \leftarrow n, t} \subset \mathcal{D}_\varepsilon^n$ as the set of initial parameters Z_n such that at time t , the following condition is verified: $\{1, \dots, m\}$ are the remaining particles of $Z_n(t, Z_n)$, and the recollision indices defined in the previous

section vanish: for all j , $\kappa_j(t) = 0$.

Let $h_m \in L^\infty(\mathbb{D}^m)$ be a test function (not necessarily symmetric under permutation of variables). We define the *pseudotrajectory development* as the functional $\Phi_{m \leftarrow n}^t : L^\infty(\mathbb{D}^m) \rightarrow L^\infty(\mathbb{D}^n)$ with

$$(5.2.1) \quad \Phi_{m \leftarrow n}^t[h_m](Z_n) := \frac{1}{(n-m)!} \sum_{\substack{(s_i, \bar{s}_i)_{i \leq n-m} \\ (\kappa_j)_j}} \left(\prod_{i=1}^{n-m} \bar{s}_i \right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))}^{m \leftarrow n, t}} h_m(Z_n(t, Z_n)).$$

We have the following semigroup property:

Proposition 5.2.1

Consider $m \leq n$ two integers, $t > t' > 0$ two evaluation times and i_m a family of particles. Then for any function $h_m \in L^\infty(\mathbb{D}^m)$ and almost all initial data $Z_n \in \mathcal{D}_\varepsilon^n$,

$$(5.2.2) \quad \sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)} \Phi_{m \leftarrow n}^t[h_m](Z_n) = \sum_{n'=m}^n \sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)} \Phi_{n' \leftarrow n}^{t'} \left[\Phi_{m \leftarrow n'}^{t-t'}[h_m] \right] (Z_n).$$

Proof : Fix collision parameters $((s_i, \bar{s}_i)_{i \leq n-m}, (\kappa_j)_{j \leq n})$ and an initial data. In the pseudotrajectory $Z_n(\tau, ((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j)), Z_n)$, let ω be the set of remaining particles at time t' and t_l the time of the last annihilation before t' . We construct two sets of collision parameters

$$\begin{aligned} ((s'_i, \bar{s}'_i)_{i \leq n-|\omega|}, (\kappa'_j)_{j \leq n}) &:= ((s_i, \bar{s}_i)_{i \leq n-|\omega|}, (\kappa_j - \kappa_j(t_l))_{j \leq n}), \\ ((s''_i, \bar{s}''_i)_{i \leq |\omega|-m}, (\kappa''_j)_{j \in \omega}) &:= ((s_i, \bar{s}_i)_{i > |\omega|-m}, (\kappa_j - \kappa_j(t'))_{j \in \omega}). \end{aligned}$$

We first prove the equality

$$\begin{aligned} Z_n(t, ((s_i, \bar{s}_i)_{n-m}, (\kappa_j)_n), Z_n) \\ = Z_\omega(t-t', ((s''_i, \bar{s}''_i)_{|\omega|-m}, (\kappa''_j)_\omega), Z_n(t', ((s'_i, \bar{s}'_i)_{n-|\omega|}, (\kappa'_j)_n), Z_n)), \end{aligned}$$

with obvious simplification of notation. Until time t_l we have

$$Z_n(\tau, ((s_i, \bar{s}_i)_n, (\kappa_j)_n), Z_n) = Z_n(\tau, ((s'_i, \bar{s}'_i)_{n-|\omega|}, (\kappa'_j)_n), Z_n).$$

On the time interval $[t_l, t']$, there are only recollisions (no annihilation) in the two pseudotrajectories. On the left hand side, are treated by the decreasing parameters $\kappa_j(\tau)$ which decrease. On the right hand side, since we have treated all the annihilations, particles evolve along the Hamiltonian flow. Note that after time t_l , the $\kappa'_j(\tau)$ vanish. Hence at time t'

$$Z_n(t', ((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j)), Z_n) = Z_n(t', ((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_j)), Z_n)$$

and denoting $\iota(\tau)$ the collision indices associated with the first pseudotrajectory,

$$\iota(t') = n - |\omega|, \quad \forall j, \kappa'_j = \kappa_j - \kappa_j(t').$$

Pursuing this construction we obtain that

$$Z_n(t, ((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j)), Z_n) = Z_\omega(t-t', ((s''_i, \bar{s}''_i), (\kappa''_j)), Z_n(t', ((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_j)), Z_n))$$

which will be shortened as

$$Z_n(t, Z_n) = Z_\omega(t-t', Z_n(t', Z_n)).$$

For each initial data, we have constructed an onto map

$$((s_i, \bar{s}_i)_n, (\kappa_j)_n) \mapsto (\omega, ((s'_i, \bar{s}'_i)_{n-|\omega|}, (\kappa'_j)_n), ((s''_i, \bar{s}''_i)_{|\omega|-m}, (\kappa''_j)_{|\omega|}))$$

with in addition

$$\prod_{i=1}^{n-m} \bar{s}_i = \prod_{i=1}^{n-|\omega|} \bar{s}'_i \prod_{i=1}^{|\omega|-m} \bar{s}''_i.$$

Hence denoting $\mathcal{R}_{((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_j))}^{\omega \leftarrow n, t}$ the set of initial data such that the set of remaining particles of $Z_n(t', ((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_j)), Z_n)$ is ω , and the corresponding recollision parameters $\kappa'_i(t')$ vanish, we have

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(s_i, \bar{s}_i)_{i \leq n-m} \\ (\kappa_j)_j}} \prod_{i=1}^{n-m} \bar{s}_i \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))}^{m \leftarrow n, t}} h_m(Z_n(t)) &= \sum_{[m] \subset \omega \subset [n]} \sum_{\substack{(s'_i, \bar{s}'_i)_{i \leq n-|\omega|} \\ (\kappa'_j)_{j \leq n}}} \prod_{i=1}^{n-|\omega|} \bar{s}'_i \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_j))}^{\omega \leftarrow n, t}} \\ &\quad \times \sum_{\substack{(s''_i, \bar{s}''_i)_{i \leq |\omega|-m} \\ (\kappa''_j)_\omega}} \prod_{i=1}^{|\omega|-m} \bar{s}''_i \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s''_i, \bar{s}''_i), (\kappa''_j))}^{m \leftarrow \omega, t}} (Z_n(t')) h_m(Z_\omega((t-t'), Z_n(t')))). \end{aligned}$$

This proves that for $Z_n \in \mathcal{D}_\varepsilon^n$,

$$\begin{aligned} (n-m)! \Phi_{m \leftarrow n}^t [h_m](Z_n) &= \sum_{n'=m}^n \sum_{\substack{\omega \subset [m+1, m+n] \\ |\omega|=n'-m}} (n-n')! \Phi_{n' \leftarrow n}^{t'} [(n'-m)! \Phi_{m \leftarrow n'}^{t-t'} [h_m]] (Z_m, Z_\omega, Z_{\omega^c}). \end{aligned}$$

Then summing on all families of particles

$$\begin{aligned} &\sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)} \Phi_{m \leftarrow n}^t [h_m](Z_{i_n}(0)) \\ &= \sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)} \sum_{n'=m}^n \frac{1}{\binom{n-m}{n'-m}} \sum_{\substack{\omega \subset [m+1, m+n] \\ |\omega|=n'-m}} \Phi_{n' \leftarrow n}^{t'} [\Phi_{m \leftarrow n'}^{t-t'} [h_m]] ((Z_{i_m}, Z_{i_\omega}, Z_{i_{\omega^c}})(0)) \\ &= \sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)} \sum_{n'=m}^n \Phi_{n' \leftarrow n}^{t'} [\Phi_{m \leftarrow n'}^{t-t'} [h_m]] (Z_{i_n}(0)). \end{aligned}$$

■

We can now write the pullback of a test function in terms of pseudotrajectory developments. This is the main result of this section:

Theorem 5.2.2

Let (i_1, \dots, i_m) be a family of particles, with $i_{\max} := \max\{i_1, \dots, i_m\}$. For almost all $Z_{\mathcal{N}} \in \mathcal{D}_\varepsilon \cup \{\mathcal{N} \geq i_{\max}\}$ we have

$$(5.2.3) \quad h_m(Z_{(i_1, \dots, i_m)}(t)) = \sum_{n \geq m} \sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)} \Phi_{m \leftarrow n}^t [h_m](Z_{i_n}(0)).$$

In addition if we do not fix (i_1, \dots, i_m) we have

$$(5.2.4) \quad \sum_{\underline{i}_m} h_m(\mathbf{Z}_{\underline{i}_m}(t)) = \sum_{n \geq m} \sum_{\underline{i}_n} \Phi_{m \leftarrow n}^t[h_m](\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}(0)).$$

Proof : The proof is an adaptation of [PS15].

We rewrite the semigroup property of the previous proposition for a specific realization of the hard sphere process: for $t > t' > 0$,

$$\sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)} \Phi_{m \leftarrow n}^t[h_m](\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}(0)) = \sum_{n'=m}^n \sum_{(i_{m+1}, \dots, i_{n'})} \sum_{(i_{n'+1}, \dots, i_n)} \Phi_{n' \leftarrow n}^{t'} \left[\Phi_{n \leftarrow n'}^{t-t'}[h_m] \right] (\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}(0)).$$

Thanks to Alexander's proof of wellposedness of the hard sphere dynamics [Ale75], outside a set of zero measure the number of collisions is finite on any finite interval. Hence $[0, t]$ can be cut into small time intervals $[t_k, t_{k+1}]$ such that on each time interval there is at most one collision between two particles i and j , and if i (or j) is removed there is no collision at all. Using the semigroup property, one needs to prove the result only on each $[t_k, t_{k+1}]$.

We fix the number of particles \mathcal{N} and the initial configuration $\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}$ and we consider a small time t such that the preceding conditions are valid in $[0, t]$. We distinguish three cases.

First, suppose that on $[0, t]$ none of the particles in \underline{i}_m collide. Then for any $n > m$ all the $\mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)}^{m \leftarrow n, t}}(\mathbf{Z}_{\underline{i}_n})$ vanish and

$$h_m(\mathbf{Z}_{\underline{i}_m}(t)) = \Phi_{m \leftarrow m}^t[h_m](\mathbf{Z}_{\underline{i}_m}(0)).$$

In the same way if a collision occurs between two particles of \underline{i}_m , $\mathbf{Z}_{\underline{i}_m}$ is in $\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)}^{m \leftarrow n, t}$ and the same equality holds.

Finally, suppose that the collision happens between one particle of \underline{i}_m and another particle i_{m+1} . Up to a permutation of the indices, the collision happens between i_1 and i_{m+1} . Removing all the vanishing terms,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq m} \sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)} \Phi_{m \leftarrow n}^t[h_m](\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}) &= h_m\left(\mathbf{Z}_m(t, (t, ((), (0)_m)) \mathbf{Z}_{\underline{i}_m})\right) \\ &\quad - h_m\left(\mathbf{Z}_{m+1}(t, (((1, -1)), (0)_{m+1}), \mathbf{Z}_{\underline{i}_{m+1}})\right) \\ &\quad + h_m\left(\mathbf{Z}_{m+1}(t, (((1, 1)), (0)_{m+1}), \mathbf{Z}_{\underline{i}_{m+1}})\right). \end{aligned}$$

In the two first terms on the right hand side, particles move along straight lines because there is no scattering at the collision. Thus these two terms compensate. In the third term, since particles in \underline{i}_{m+1} are deviated at the collision,

$$\mathbf{Z}_{m+1}(t, (((1, 1)), (0)_{m+1}), \mathbf{Z}_{\underline{i}_{m+1}}) = \mathbf{Z}_{\underline{i}_m}(t)$$

and

$$\begin{aligned} h_m(\mathbf{Z}_{\underline{i}_m})(t) &= h_m\left(\mathbf{Z}_m(t, (t, ((), (0)_m)) \mathbf{Z}_{\underline{i}_m})\right) - h_m\left(\mathbf{Z}_{m+1}(t, (((1, -1)), (0)_{m+1}), \mathbf{Z}_{\underline{i}_{m+1}})\right) \\ &\quad + h_m\left(\mathbf{Z}_{m+1}(t, (((1, 1)), (0)_{m+1}), \mathbf{Z}_{\underline{i}_{m+1}})\right), \end{aligned}$$

which concludes the proof. \blacksquare

We conclude this section by observing that, applied to the covariance, the theorem gives the following formula:

$$\mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^t(h)\zeta_\varepsilon^0(g)] = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\mu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\sum_{(i_1, \dots, i_n)} \Phi_{1 \leftarrow n}^t[h](\mathbf{Z}_{i_n}(0)) \zeta_\varepsilon^0(g) \right].$$

As recalled in the introduction, since we do not know how take account the cancellations due to the factors \bar{s}_i , we can only bound $\Phi_{1 \leftarrow n}^t[h]$ by means of an evaluation of the number of collision parameters. The problem is then that there no *a priori* bound on such number. To overcome this difficulty, we are led to introduce a conditioning of the invariant measure.

5.2.3 Conditioning

We shall need two conditionings of the initial data.

The first one is a symmetric conditioning on the full particle configuration.

Definition 5.2.2 (*Distance cluster*)

Let L be a positive real number and $Z_n \in \mathbb{D}^n$ be a particle configuration. We consider the undirected graph of vertices $\{1, \dots, n\}$ and of edges

$$\{(i, j) \in [1, n]^2, d(x_i, x_j) < L\}.$$

A L -distance cluster is one of its connected component.

Let $\gamma > 0$ be an integer depending only on the dimension, $\delta > 0$ a time scale (which will be a power of ε) and $\mathbb{V} > 0$ a velocity bound. In the following, we shall only look at $\gamma\delta\mathbb{V}$ -distance clusters and we will therefore drop the " $\gamma\delta\mathbb{V}$ ".

We construct $\Upsilon_\varepsilon \subset \mathcal{D}_\varepsilon$ the set of particle configurations such that for any time $\tau \in \{0, \delta, 2\delta, \dots, t\}$, there is no distance cluster of size bigger than γ at time τ , and inside any subset of particles $\omega \subset [1, \mathcal{N}]$ which less than γ elements, $\frac{1}{2}|\mathbf{V}_\omega(\tau)|^2$ is bounded by $\frac{1}{2}\mathbb{V}^2$. We have the following bound on the measure of the complement of Υ_ε :

Proposition 5.2.3

There exists a constant C_γ depending only on γ and on the dimension such that

$$(5.2.5) \quad \mathbb{P}_\varepsilon(\Upsilon_\varepsilon^c) \leq C_\gamma \frac{t}{\delta} \left(\mu_\varepsilon \left(\mu_\varepsilon \delta^d \mathbb{V}^d \right)^\gamma + \mu_\varepsilon^\gamma e^{-\mathbb{V}^2/4} \right).$$

Proof :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\varepsilon(\Upsilon_\varepsilon^c) &\leq \sum_{k=0}^{t/\delta} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\sum_{(i_1, \dots, i_{\gamma+1})} \mathbb{1}_{\mathbf{X}_{i_{\gamma+1}}(k\delta) \text{ form a distance cluster}} + \sum_{k'=1}^{\gamma} \sum_{(i_1, \dots, i_{k'})} \mathbb{1}_{|\mathbf{V}_{i_{k'}}(k\delta)| \geq \mathbb{V}} \right] \\ &\leq \frac{t}{\delta} \left(\mu_\varepsilon^{\gamma+1} \int \mathbb{1}_{\mathbf{X}_{\gamma+1} \text{ form a distance cluster}} M^{\otimes(\gamma+1)} dZ_{\gamma+1} + \sum_{k'=1}^{\gamma} \mu_\varepsilon^\gamma \int \mathbb{1}_{|\mathbf{V}_{k'}| \geq \mathbb{V}} M^{\otimes(\gamma+1)} dZ_{\gamma+1} \right) \\ &\leq C_\gamma \frac{t}{\delta} \left(\mu_\varepsilon^{\gamma+1} \left((\gamma\delta\mathbb{V})^d \right)^\gamma + \mu_\varepsilon^\gamma e^{-\frac{\mathbb{V}^2}{2}} \right) \end{aligned}$$

where C_γ is a constant depending only on the dimension and γ . We used that the Gibbs measure is time invariant and that the particles \mathbf{X}_γ have to be at distance less than $\gamma\delta\mathbb{V}$ from $x_{\gamma+1}$ in order to form a distance cluster. \blacksquare

Hence, if we set $\delta := \varepsilon^{1-\frac{1}{2a}}$, $\mathbb{V} := |\log \varepsilon|$ and fix $\gamma \in \mathbb{N}$ large enough, $\mathbb{P}_\varepsilon(\Upsilon_\varepsilon^c)$ is $O(\varepsilon^d)$.

The second conditioning is an asymmetric conditioning. We consider only a given, finite particle configuration Z_r . For fixed pseudotrajectory parameters $((s_i, \bar{s}_i)_{1 \leq i \leq n-1}, (\kappa_j)_{1 \leq j \leq n})$, the configuration $Z_r \in \mathcal{D}_\varepsilon^r$ forms a *collision cluster* if the collision graph of $Z_r(\tau, ((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j), Z_r)$ on the time interval $[0, \delta]$ is connected. We define *local recollision* of $Z_r(\tau)$ as the first collision (forward in time) which creates a cycle in the collision graph.

We define the function $\chi_r : \mathcal{D}_\varepsilon^r \mapsto \{0, 1\}$ as the indicator function of:

$$\left\{ Z_r \in \mathcal{D}_\varepsilon^r, \exists((s_i, \bar{s}_i)_{1 \leq i \leq n-1}, (\kappa_j)_{1 \leq j \leq n}), \right. \\ \left. Z_r(\tau) \text{ forms a collision cluster with local recollision} \right\}.$$

We shall sometimes drop the index r from χ_r , when the cardinality of the cluster is clear from the context.

We have the following L^1 bound on χ_r :

Proposition 5.2.4

There exists a positive constant C_r and some $\alpha > 0$ depending only on the dimension such that

$$(5.2.6) \quad \int_{\Lambda^{r-1} \times B_r(\mathbb{V})} \chi_r(Z_r) M^{\otimes r}(V_r) dX_{2,r} dV_r \leq C_r \mu_\varepsilon^{-r+1} \delta^2 \left(\mu_\varepsilon \delta^d \mathbb{V}^d \right)^{r-3} \varepsilon^\alpha$$

where $B_r(\mathbb{V})$ is the ball of radius \mathbb{V} in dimension rd .

Proof : First of all we observe that, if the pseudotrajectories $Z_r(\tau)$ form a collision cluster for some collision parameters, the initial positions in the configuration Z_r need to be close enough. As the speed of each particles is globally bounded by \mathbb{V} , there exists, for any couple of particle (i, i') , a finite sequence $i = j_1, j_2, \dots, j_k = i'$ of two by two distinct indices such that

$$|x_{j_l} - x_{j_{l+1}}| \leq 2\mathbb{V}\delta.$$

Thus, the distance between any two particles of Z_r is bounded by $2r\mathbb{V}\delta$. We need, however, a more precise geometric conditioning in order to obtain (5.2.6).

Let $Z_r \in \mathcal{D}_\varepsilon^r$ be such that $\chi(Z_r)$ is non zero. Then, there exists a set of pseudotrajectory parameters $((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)$ such that the pseudotrajectory $Z_r(\tau, ((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j))$ has a local recollision. We define τ_{stop} the time of such first local recollision. We construct a second set of recollision parameters:

$$\kappa'_j = \kappa_j(0) - \kappa_j(\tau_s).$$

Then for any $\tau \in [0, \tau_{\text{stop}}]$,

$$Z_r(\tau, ((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)) = Z_r(\tau, ((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa'_j)_j))$$

and for all j , $\kappa'_j(\tau_{\text{stop}}) = 0$. Moreover, on $[0, \tau_{\text{stop}}]$, the pseudotrajectory has no local recollision. Thus κ'_j is smaller than $r - 1$.

Let $\varpi \subset [1, r]$ be the connected component of the collision graph $\mathcal{G}_r^{[0, \tau_{\text{stop}}]}$ which contains the two particles involved in the local recollision. Because particles in ϖ do not interact with particles in ϖ^c , $Z_r(t, Z_r)$ restricted to particles ϖ and to the time interval $[0, \tau_s]$ can be represented by a pseudotrajectory $Z_{|\varpi|}(\tau, ((s''_i, \bar{s}''_i)_i, (\kappa''_j)_j), Z_\varpi)$ for some collision parameters $((s''_i, \bar{s}''_i)_i, (\kappa''_j)_j)$. Note that we can take the κ''_j smaller than the maximum of the κ'_j and thus smaller than $r - 1$. This gives a more precise constraint on Z_ϖ , and

$\{Z_r, \chi_r(Z_r) = 1\}$ is included in

$$\bigcup_{\varpi \subset \{1, \dots, r\}} \bigcup_{\substack{(s_i, \bar{s}_i)_{i \leq |\varpi|} \\ (\kappa_j)_{j \in [0, r-1]^{|\varpi|}}} \left\{ Z_r \left| \begin{array}{l} \text{the collision graph of} \\ Z_{|\varpi|}(\tau, ((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j), Z_{\varpi}) \\ \text{is connected} \end{array} \right. \right\}.$$

Note this union runs over a finite set of parameters.

We can now fix the pseudotrajectory parameters. The following standard estimation holds:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda^{|\varpi|-1} \times B_{|\varpi|}(\mathbb{V})} \mathbb{1}_{\substack{Z_{|\varpi|}(\tau) \text{ forms a cluster} \\ \text{with local recollision}} e^{-\frac{1}{2}|V_r|^2} dX_{\varpi \setminus \{\min \varpi\}} dV_{\varpi} \\ \leq C_{|\varpi|} \mu_{\varepsilon}^{-|\varpi|+1} \delta^2 \left(\mu_{\varepsilon} \delta^{d \vee d} \right)^{|\varpi|-3} \varepsilon^{\alpha} \end{aligned}$$

where we used that $|\varpi| \geq 2$ and that $\varepsilon |\log \varepsilon| / \delta = O(\varepsilon^{\alpha})$ for some α . It follows from the same proof than for Lemma 5.5.3 below, replacing in the bound the two times scales θ and t by δ (the unique time scale in the present case) and replacing the number of particle n'' by $|\varpi|$.

Using the distance constraints on Z_{ϖ^c} and summing on all possible parameters, we obtain the announced bound. \blacksquare

Finally, we denote $\mathcal{X}_{(i_1, \dots, i_n)} : \{\mathcal{Z}_{\mathcal{N}} \in \mathcal{D}_{\varepsilon}, \mathcal{N} \geq \max i_n\} \mapsto \{0, 1\}$ the indicator function of the set

$$\left\{ \mathcal{Z}_{\mathcal{N}} \in \mathcal{D}_{\varepsilon} \mid \exists \varpi, \varpi \cap (i_1, \dots, i_n) \neq \emptyset, \chi(\mathcal{Z}_{\varpi}) = 1 \right\}.$$

Note that \mathcal{X}_{i_n} depends on the ‘background particles’ different from (i_1, \dots, i_n) .

Note also that we have:

$$(5.2.7) \quad \mathcal{X}_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{N}}) = 1 - \prod_{\substack{\varpi \subset \{1, \dots, \mathcal{N}\} \\ \varpi \cap \{i_1, \dots, i_n\} \neq \emptyset}} (1 - \chi(\mathcal{Z}_{\varpi})).$$

The two conditionings introduced in this section allow us to bound the number of recollisions, as explained next. Let $Z_n \in \mathcal{D}_{\varepsilon}^n$ be an initial position such that there is no distance cluster of size bigger than γ (first conditioning) and for any $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$, $\chi(Z_{\sigma}) = 0$ (second conditioning). Fix now collision parameters $((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)$ such that the pseudotrajectory $Z_n(t)$ has no recollision on $[\delta, t]$ (which will be ensured by a tuned sampling of collisions, introduced in the following section). Then due to the first, symmetric conditioning, any particle can only meet $\gamma - 1$ different particles on $[0, \delta]$. Moreover due to the second, asymmetric conditioning, there is no local recollision on $[0, \delta]$. This implies that there are at most $\gamma - 1$ recollisions per particle. In particular, any pseudotrajectory of this type can be parameterized by collision parameters

$$((s_i, \bar{s}_i)_{1 \leq i \leq n-1}, (\kappa_j)_{1 \leq j \leq n}) \in \{\pm 1\}^{2(n-1)} \times [0, \gamma - 1]^n.$$

5.2.4 Sampling

Let $\tau > 0$. Using the two conditionings of the previous section, for $\mathcal{Z}_{\mathcal{N}} \in \Upsilon_{\varepsilon} \cap \{\mathcal{X}_{i_m}(\mathcal{Z}_{\mathcal{N}}) = 0\}$ we have

$$(5.2.8) \quad h_m(\mathcal{Z}_{i_m}(\tau)) = \sum_{n \geq m} \sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)} \Phi_{m \leftarrow n}^{\gamma, \tau}[h_m](\mathcal{Z}_{i_n}(0))$$

where

$$(5.2.9) \quad \Phi_{m \leftarrow n}^{\gamma, \tau}[h_m](Z_n) := \frac{1}{(n-m)!} \sum_{\substack{(s_i, \bar{s}_i)_{i \leq n-m} \\ (\kappa_j)_j \in [1, \gamma-1]^n}} \prod_{i=1}^{n-m} \bar{s}_i \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))}^{m \leftarrow n, \gamma, \tau}} h_m(Z_n(\tau)).$$

For generic t and particle configuration, we can then perform the following decomposition on Υ_ε

$$(5.2.10) \quad \begin{aligned} & \sum_{\dot{i}_m} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(t)) \\ &= \sum_{\dot{i}_m} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(t)) \mathcal{X}_{\dot{i}_m}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t-\delta)) + \sum_{\dot{i}_m} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(t)) (1 - \mathcal{X}_{\dot{i}_m}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t-\delta))) \\ &= \sum_{\dot{i}_m} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(t)) \mathcal{X}_{\dot{i}_m}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t-\delta)) \\ & \quad + \sum_{n \geq m} \sum_{\dot{i}_n} \Phi_{m \leftarrow n}^{\gamma, \delta}[h_m](\mathbf{Z}_{\dot{i}_n}(t-\delta)) (1 - \mathcal{X}_{\dot{i}_m}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t-\delta))). \end{aligned}$$

Let $\Phi_{m,n}^{\gamma, \tau}[h_m]$ be the symmetrization $\Phi_{m \leftarrow n}^{\gamma, \tau}[h_m]$:

$$\Phi_{m,n}^{\gamma, \tau}[h_m](Z_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \Phi_{m \leftarrow n}^{\gamma}[h_m](z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}).$$

There is a more explicit formula for such functional. We define $\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))}^{m, n, \gamma, \tau} \subset \mathcal{D}_\varepsilon^n$ as the set of initial data such that pseudotrajectories $Z_n(\cdot)$ have m remaining particles at time τ , $\kappa_j(\tau) = 0$ for all j and there is no local recollision. Then

$$(5.2.11) \quad \Phi_{m,n}^{\gamma, \tau}[h_m](Z_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(s_i, \bar{s}_i)_{i \leq n-m} \\ (\kappa_j)_j \in [0, \gamma-1]^n}} \prod_{i=1}^{n-m} \bar{s}_i \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))}^{m, n, \gamma, \tau}} h_m(Z_n(\tau)).$$

Finally we want to isolate pseudotrajectories with no recollision whatsoever: these will form the main contribution in the Boltzmann-Grad limit. We then define (i) the development along pseudotrajectories without recollision

$$(5.2.12) \quad \Phi_{m,n}^{0, \tau}[h_m](Z_n) := \frac{1}{n!} \sum_{(s_i, \bar{s}_i)_{i \leq n-m}} \prod_{i=1}^{n-m} \bar{s}_i \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{m, n, \tau}} h_m(Z_n(\tau)),$$

where $\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{m, n, \tau} \subset \mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i), (0)_j}^{m, n, \gamma, \tau}$ is such that the pseudotrajectories have no recollision, and (ii) the development along pseudotrajectories with non-pathological recollisions

$$(5.2.13) \quad \Phi_{m,n}^{>, \tau}[h_m] := \Phi_{m,n}^{\gamma, \tau}[h_m] - \Phi_{m,n}^{0, \tau}[h_m].$$

We bring together all these decompositions and obtain, on Υ_ε ,

$$(5.2.14) \quad \begin{aligned} \sum_{\dot{i}_m} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(\tau)) &= \sum_{n \geq m} \sum_{\dot{i}_n} \Phi_{m,n}^{0, \delta}[h_m](\mathbf{Z}_{\dot{i}_n}(\tau-\delta)) + \sum_{n \geq m} \sum_{\dot{i}_n} \Phi_{m,n}^{>, \delta}[h_m](\mathbf{Z}_{\dot{i}_n}(\tau-\delta)) \\ & \quad + \sum_{\dot{i}_m} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(\tau)) \mathcal{X}_{\dot{i}_m}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(\tau-\delta)) \\ & \quad - \sum_{n \geq m} \sum_{\dot{i}_n} \Phi_{m \leftarrow n}^{\gamma, \delta}[h_m](\mathbf{Z}_{\dot{i}_n}(\tau-\delta)) \mathcal{X}_{\dot{i}_m}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(\tau-\delta)). \end{aligned}$$

The first term is an expansion along pseudotrajectories with no recollision. It is the main part of the sum. The rest takes into account the recollisions in the hard sphere dynamics.

We iterate this decomposition:

$$\begin{aligned} \sum_{i_m} h_m(\mathbf{Z}_{i_m}(\tau)) &= \sum_{n \geq m} \sum_{i_n} \Phi_{m,n}^{0,\tau}[h_m](\mathbf{Z}_{i_n}(0)) + \sum_{k=0}^{\tau/\delta} \sum_{n \geq m} \sum_{i_n} \Phi_{m,n}^{>,k\delta}[h_m](\mathbf{Z}_{i_n}(\tau - k\delta)) \\ &+ \sum_{n \geq m} \sum_{i_n} \Phi_{m,n}^{0,(k-1)\delta}[h_m](\mathbf{Z}_{i_n}(\tau - (k-1)\delta)) \mathcal{X}_{i_m}(\mathbf{Z}_{i_n}(\tau - k\delta)) \\ &- \sum_{n' \geq n \geq m} \sum_{i_{n'}} \Phi_{n \leftarrow n'}^{\gamma,\delta} \left[\Phi_{m,n}^{0,(k-1)\delta}[h_m] \right] (\mathbf{Z}_{i_{n'}}(\tau - k\delta)) \mathcal{X}_{i_m}(\mathbf{Z}_{i_{n'}}(\tau - k\delta)). \end{aligned}$$

The final ingredient is now a second sampling on a longer time scale $\theta = 1/\beta \log |\log \varepsilon|$ controlling the growth of the number of collisions. We denote $K := t/\theta \in \mathbb{N}$ and $K' := \theta/\delta \in \mathbb{N}$.

We obtain the following decomposition

$$(5.2.15) \quad \mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^t(h) \zeta_\varepsilon^0(g)] = G_\varepsilon^{\text{main}}(t) + G_\varepsilon^{\text{clust}}(t) + G_\varepsilon^{\text{exp}}(t) + G_\varepsilon^{\text{rec},1}(t) + G_\varepsilon^{\text{rec},2}(t)$$

with $G_\varepsilon^{\text{main}}(t)$ the main part:

$$(5.2.16) \quad G_\varepsilon^{\text{main}}(t) := \sum_{\substack{\underline{n} := (n_j)_{j \leq K} \\ 0 < n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{i_{n_K}} \Phi_{\underline{n}}^0[h] \left(\mathbf{Z}_{i_{n_K}}(0) \right) \zeta_\varepsilon^0(g) \right]$$

where

$$\Phi_{\underline{n}}^0[h] := \Phi_{n_{K-1}, n_K}^{0,\theta} \circ \Phi_{n_{K-2}, n_{K-1}}^{0,\theta} \cdots \circ \Phi_{1, n_1}^{0,\theta}[h]$$

is the development of h along pseudotrajectories with n_k annihilations on the time interval $[t - (k-1)\theta, t - k\theta]$ and no recollision, denoting $\underline{n} = (n_1, \dots, n_K)$; moreover:

$$(5.2.17) \quad G_\varepsilon^{\text{clust}}(t) := \mathbb{E}_\varepsilon [\zeta_\varepsilon^t(h) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Gamma_\varepsilon^c}] - \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_K \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{i_{n_K}} \Phi_{\underline{n}}^0[h] \left(\mathbf{Z}_{i_{n_K}}(0) \right) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Gamma_\varepsilon^c} \right]$$

corresponding to the symmetric conditioning;

$$(5.2.18) \quad G_\varepsilon^{\text{exp}}(t) := \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_{k-1} \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \sum_{n_k > 2^k + n_{k-1}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{i_{n_k}} \Phi_{\underline{n}}^0[h] \left(\mathbf{Z}_{i_{n_k}}(t - k\theta) \right) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Gamma_\varepsilon} \right]$$

corresponding with trees with superexponential growth;

$$(5.2.19) \quad G_\varepsilon^{\text{rec},1}(t) := \sum_{\substack{1 \leq k \leq K-1 \\ 1 \leq k' \leq K'}} \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_k \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \sum_{n'' \geq n' \geq n_k} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{i_{n''}} \Phi_{\underline{n}, n', n''}^{>,k'}[h] \left(\mathbf{Z}_{i_{n''}}(t_s) \right) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Gamma_\varepsilon} \right]$$

corresponding to (non local) recollisions; and finally $G_\varepsilon^{\text{rec},2}(t)$:

(5.2.20)

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq k \leq K-1 \\ 1 \leq k' \leq K'}} \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_k \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \left(\sum_{n' \geq n_k} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_{n'}} \Phi_{n,n'}^{0,k'}[h] \left(\mathbf{Z}_{i_{n_k}}(t_s + \delta) \right) \mathcal{X}_{i_{n'}}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \right. \\ & \left. - \sum_{n'' \geq n' \geq n_k} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_{n''}} \Phi_{n' \leftarrow n''}^{\gamma,\delta} \left[\Phi_{n,n'}^{0,k'}[h] \right] \left(\mathbf{Z}_{i_{n''}}(t_s) \right) \mathcal{X}_{i_{n'}}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \right) \end{aligned}$$

corresponding to pathological pseudotrajectories. In the last two terms, we have denoted $t_s := t - (k-1)\theta - k'\delta$ the *stopping time*, and

- $\Phi_{n,n'}^{0,k'}[h] := \Phi_{n_k,n'}^{0,k'\delta} \circ \Phi_n^0[h]$, the pseudotrajectory development with no recollision, n' annihilations on $[0, (k'-1)\delta]$ and for $j < k$, n_j annihilations on $[(k'-1)\delta + (k-j)\theta, (k'-1)\delta + (k-j+1)\theta]$,
- $\Phi_{n,n',n''}^{>,k'}[h] := \Phi_{n',n''}^{>,\delta} \circ \Phi_{n,n'}^{0,k'}[h]$, the pseudotrajectory development with no recollision on $[\delta, k'\delta + k\theta]$, n'' annihilations on $[0, \delta]$, n' annihilations on $[\delta, k'\delta]$ and for $j < k$ and n_j annihilations on $[k'\delta + (k-j)\theta, k'\delta + (k-j-1)\theta]$, and at the least one recollision.

We stress that, thanks to the conditioning, each pseudotrajectory appearing in this representation has at most γ recollisions per particle.

5.3 Quasi-orthogonality estimates

The different error terms obtained in the previous section are of the form

$$\mathbb{E}_\varepsilon \left[\sum_{i_n} \Phi_n[h](\mathbf{Z}_{i_n}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right]$$

with $\Phi_n : L^\infty(\mathbb{D}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{D}^n)$ some continuous functional. In order to bound the errors, we will need an $L^2(\mathbb{P}_\varepsilon)$ bound on $\sum_{i_n} \Phi_n[h](\mathbf{Z}_{i_n})$. Such bound is derived in the following sections from detailed estimations on the functionals $\Phi_n[h]$. We will use, in particular, that we can bound the $\Phi_n[h](Z_n)$ by looking only at the relative positions of particles inside Z_n .

In the following we denote for $y \in \Lambda$

$$(5.3.1) \quad \tau_y : \begin{cases} \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n \\ (X_n, V_n) \mapsto (x_1 + y, \dots, x_n + y, V_n). \end{cases}$$

Theorem 5.3.1

Fix $m < n$ two positive integers, and g_n, h_m two functions on \mathbb{D}^n and \mathbb{D}^m such that there exists a finite sequence $(c_0, c'_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_+^{n+2}$ bounding g_n, h_m in the following way:

$$(5.3.2) \quad \int_{x_1=0} \sup_{y \in \Lambda} |g_n(\tau_y Z_n)| M^{\otimes n}(V_n) dX_{2,n} dV_n \leq c_0,$$

$$(5.3.3) \quad \int_{x_1=0} \sup_{y \in \Lambda} |h_m(\tau_y Z_m)| M^{\otimes m}(V_m) dX_{2,m} dV_m \leq c'_0$$

and for all $l \in [1, m]$

$$(5.3.4) \quad \int_{x_1=0} \sup_{y \in \Lambda} |g_n(\tau_y Z_n) h_m(\tau_y Z_{n+1-l, n+m-l})| M^{\otimes(n+m-l)}(V_{n+m-l}) dX_{2, n+m-l} dV_{n+m-l} \leq \frac{\mu_\varepsilon^{l-1}}{n^l} c_l.$$

There exists a constant $C > 0$ depending only on the dimension such that

$$(5.3.5) \quad |\mathbb{E}_\varepsilon[g_n]| \leq C^n c_0, \quad |\mathbb{E}_\varepsilon[h_m]| \leq C^m c'_0$$

and denoting

$$(5.3.6) \quad g_n \circledast_l h_m(Z_{n+m-l}) = \frac{1}{(n+m-l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m-l}} g_n(Z_{\sigma([1, n])}) h_m(Z_{\sigma([n+1-l, n+m-l])}),$$

$$(5.3.7) \quad \mathbb{E}_\varepsilon[\mu_\varepsilon \hat{g}_n \hat{h}_m] = \sum_{l=1}^m \binom{n}{l} \binom{m}{l} \frac{l!}{\mu_\varepsilon^{l-1}} \mathbb{E}_\varepsilon[g_n \circledast_l h_m] + O(C^{n+m} c_0 c'_0 \varepsilon).$$

In particular

$$(5.3.8) \quad |\mathbb{E}_\varepsilon[\mu_\varepsilon \hat{g}_n \hat{h}_m]| \leq C^{n+m} \sum_{l=1}^m c_l + C^{n+m} c_0 c'_0 \varepsilon.$$

Proof of Theorem 5.3.1 :

- We begin by the proof of (5.3.5).

Using invariance under permutation,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varepsilon[g_n] &= \frac{1}{\mu_\varepsilon^n \mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{p \geq n} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ \forall k, i_k \leq p}} g_n(Z_n) e^{-\mathcal{H}_p^\varepsilon(Z_p)} \frac{dZ_p}{(2\pi)^{dp/2}} \\ &= \frac{1}{\mu_\varepsilon^n \mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{p \geq n} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \frac{p!}{(n-p)!} \int g_n(Z_n) e^{-\mathcal{H}_p^\varepsilon(Z_p)} \frac{dZ_p}{(2\pi)^{dp/2}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int g_n(Z_n) e^{-\mathcal{V}_{n+p}^\varepsilon(X_n, \underline{X}_p)} M^{\otimes n} dZ_n d\underline{X}_p. \end{aligned}$$

We denote in the following $\Omega := \{X_n, x_1, \dots, x_p\}$ and for $X, Y \in \Omega$,

$$\varphi(X, Y) := -\mathbb{1}_{d(X, Y) \leq \varepsilon}$$

and we decompose $\exp(-\mathcal{V}_{n+p}^\varepsilon(X_{n+1}, \underline{X}_p))$

$$e^{-\mathcal{V}_{n+p}^\varepsilon(X_{n+1}, \underline{X}_p)} = e^{-\mathcal{V}_n^\varepsilon(X_n)} \prod_{\substack{(X, Y) \in \Omega^2 \\ X \neq Y}} (1 + \varphi(X, Y)) = e^{-\mathcal{V}_n^\varepsilon(X_n)} \sum_{G \in \mathcal{G}(\Omega)} \prod_{(X, Y) \in E(G)} \varphi(X, Y)$$

where \mathcal{G} is the set of non oriented graphs on Ω and $E(G)$ the set of edges of G . Denoting

by $\mathcal{C}(\omega)$ the set of connected graphs on ω ,

$$\begin{aligned}
& \exp(-\mathcal{V}_{n+p}^\varepsilon(X_{n+1}, \underline{X}_p)) \\
&= \sum_{\omega \subset [1,p]} \left(e^{-\mathcal{V}_n^\varepsilon(X_n)} \sum_{G \in \mathcal{C}(\omega \cup \{X_n\})} \prod_{(X,Y) \in E(G)} \varphi(X,Y) \sum_{G \in \mathcal{G}(\omega^c)} \prod_{(X,Y) \in E(G)} \varphi(X,Y) \right) \\
(5.3.9) \quad &= \sum_{\omega \subset [1,p]} \left(e^{-\mathcal{V}_n^\varepsilon(X_n) - \mathcal{V}_{|\omega^c|}^\varepsilon(\underline{X}_{\omega^c})} \sum_{G \in \mathcal{C}(\omega \cup \{X_n\})} \prod_{(X,Y) \in E(G)} \varphi(X,Y) \right) \\
&=: \sum_{\omega \subset [1,p]} e^{-\mathcal{V}_{|\omega^c|}^\varepsilon(\underline{X}_{\omega^c})} \psi_p^n(X_n, \underline{X}_\omega).
\end{aligned}$$

Thus, using exchangeability,

$$\begin{aligned}
(5.3.10) \quad \mathbb{E}_\varepsilon[g_n] &= \frac{1}{Z_\varepsilon} \sum_{p \geq 0} \sum_{p_1+p_2=p} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \frac{p!}{p_1!p_2!} \int g_n(Z_n) \psi_{p_1}^n(X_n, \underline{X}_{p_1}) e^{-\mathcal{V}_{p_2}^\varepsilon(\underline{X}_{p_2})} M^{\otimes n} dZ_n d\underline{X}_{p_1} d\underline{X}_{p_2} \\
&= \left(\frac{1}{Z_\varepsilon} \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int e^{-\mathcal{V}_p^\varepsilon(\underline{X}_p)} d\underline{X}_p \right) \left(\sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int g_n(Z_n) \psi_p^n(X_n, \underline{X}_p) M^{\otimes n} dZ_n d\underline{X}_p \right) \\
&= \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int g_n(Z_n) \psi_p^n(X_n, \underline{X}_p) M^{\otimes n} dZ_n d\underline{X}_p.
\end{aligned}$$

We recall Penrose tree inequality (see [Pen63, BGSRS20a, Jan]),

$$(5.3.11) \quad \left| \sum_{C \in \mathcal{C}(\Omega)} \prod_{(X,Y) \in E(C)} \varphi(X,Y) \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}(\Omega)} \prod_{(X,Y) \in E(T)} |\varphi(X,Y)|$$

with $\mathcal{T}(\Omega)$ the set of trees (minimally connected graphs) on Ω . Fix $\tau_{-x_1} X_n$ (the relative position between particles). Integrating a constraint $\varphi(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$ provides a factor $\mathbf{c}_d \varepsilon^d$, $\varphi(X_n, \underline{x}_j)$ a factor $n \mathbf{c}_d \varepsilon^d$ (where \mathbf{c}_d is the volume of a sphere of diameter 1). As there are

$$\frac{(p-1)!}{(d_0-1)!(d_1-1)! \cdots (d_p-1)!}$$

trees with specified vertex degrees d_0, \dots, d_p associated to vertices $X_n, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_p$ (see [Jan, BGSRS20a]), we get

$$\begin{aligned}
(5.3.12) \quad & \left| \int \psi_p^n(X_n, \underline{X}_p) d\underline{X}_p dx_1 \right| \leq \sum_{\substack{d_1, \dots, d_p \geq 1 \\ d_0 + \dots + d_p = 2p}} \frac{(p-1)!}{(d_0-1)!(d_1-1)! \cdots (d_p-1)!} n^{d_0} (\mathbf{c}_d \varepsilon^d)^p \\
& \leq (p-1)! (\mathbf{c}_d \varepsilon^d)^p \left(\sum_{d_0 \geq 1} \frac{n^{d_0}}{(d_0-1)!} \right) \left(\sum_{d_1 \geq 1} \frac{1}{(d_1-1)!} \right) \cdots \left(\sum_{d_p \geq 1} \frac{1}{(d_p-1)!} \right) \\
& \leq (p-1)! (\mathbf{c}_d \varepsilon^d)^p n e^{n+p}.
\end{aligned}$$

We can integrate on the rest of parameters using (5.3.2). Hence

$$|\mathbb{E}_\varepsilon[g_n]| \leq \sum_{p \geq 0} \frac{(p-1)! (\mathbf{c}_d \varepsilon^d)^p n e^{n+p}}{p!} \int |g_n(Z_n)| e^{-\frac{|V_n|^2}{2}} \frac{dZ_n}{(2\pi)^{dn/2}} \leq c_0 \sum_{p \geq 0} C^n (C\varepsilon)^p$$

which converges for ε small enough. This concludes the proof of (5.3.5).

- We treat now (5.3.7). Recall first that

$$\mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon \hat{g}_n \hat{h}_m \right] = \frac{1}{\mu_\varepsilon^{n+m-1}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\sum_{\underline{i}_n} g_n(\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}) \sum_{\underline{j}_m} h_m(\mathbf{Z}_{\underline{j}_m}) \right] - \mu_\varepsilon \mathbb{E}_\varepsilon [g_n] \mathbb{E}_\varepsilon [h_m].$$

Let us count the number of ways such that \underline{i}_n and \underline{j}_m can intersect on a set of length l . We have to choose two sets $A \subset [n]$ and $A' \subset [m]$ of length l , and a bijection $\sigma : A \rightarrow A'$ such that for all indices $k \in A$, $i_k = j_{\sigma k}$ and that \underline{i}_{A^c} does not intersect $\underline{j}_{(A^c)}$. Thus using the symmetry,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon \hat{g}_n \hat{h}_m \right] &= \sum_{l=1}^m \binom{n}{l} \binom{m}{l} \frac{l!}{\mu_\varepsilon^{l-1}} \mathbb{E}_\varepsilon [g_n \otimes_l h_m] \\ &\quad + \mu_\varepsilon \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\mu_\varepsilon^{n+m}} \sum_{\underline{i}_{n+m}} g_n(\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}) h_m(\mathbf{Z}_{\underline{i}_{n+1, n+m}}) \right] - \mathbb{E}_\varepsilon [g_n] \mathbb{E}_\varepsilon [g] \right). \end{aligned}$$

To estimate the error term in the second line, we write

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\mu_\varepsilon^{n+m}} \sum_{\underline{i}_{n+m}} g_n(\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}) h_m(\mathbf{Z}_{\underline{i}_{n+1, n+m}}) \right] \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int g_n(\mathbf{Z}_n) h_m(\mathbf{Z}'_m) \exp(-\mathcal{V}_{n+m+p}^\varepsilon(X_n, X'_m, \underline{X}_p)) M^{\otimes n} dZ_n M^{\otimes m} dZ'_m d\underline{X}_p. \end{aligned}$$

We denote in the following $\Omega := \{X_n, X'_m, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_p\}$ and we have that

$$\begin{aligned} \exp(-\mathcal{V}_{n+m+p}^\varepsilon(X_n, X'_m, \underline{X}_p)) &= e^{-\mathcal{V}_n^\varepsilon(X_n)} e^{-\mathcal{V}_m^\varepsilon(X'_m)} \prod_{\substack{(X,Y) \in \Omega^2 \\ X \neq Y}} (1 + \varphi(X, Y)) \\ &= e^{-\mathcal{V}_n^\varepsilon(X_n)} e^{-\mathcal{V}_m^\varepsilon(X'_m)} \sum_{G \in \mathcal{G}(\Omega)} \prod_{(X,Y) \in E(G)} \varphi(X, Y). \end{aligned}$$

Partitioning on the connected components of X_n and X'_m ,

$$\begin{aligned} &\exp(-\mathcal{V}_{n+m+p}^\varepsilon(X_n, X'_m, \underline{X}_p)) \\ &= \sum_{\omega \subset [1, p]} \left(\exp(-\mathcal{V}_n^\varepsilon(X_n) - \mathcal{V}_m^\varepsilon(X'_m) - \mathcal{V}_{|\omega^c|}^\varepsilon(\underline{X}_{\omega^c})) \sum_{\substack{G \in \mathcal{C}(\omega \cup \{X_n, X'_m\}) \\ \{X_n, X'_m\}}} \prod_{(X,Y) \in E(G)} \varphi(X, Y) \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \subset [1, p] \\ \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset}} \psi_{|\omega_1|}^n(X_n, \underline{X}_{\omega_1}) \psi_{|\omega_2|}^m(X'_m, \underline{X}_{\omega_2}) e^{-\mathcal{V}_{|(\omega_1 \cup \omega_2)^c|}^\varepsilon(\underline{X}_{(\omega_1 \cup \omega_2)^c})} \\ &=: \sum_{\omega \subset [1, p]} \psi_{|\omega|}^{n, m}(X_n, X'_m, \underline{X}_\omega) e^{-\mathcal{V}_{|\omega^c|}^\varepsilon(\underline{X}_{\omega^c})} \\ &\quad + \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \subset [1, p] \\ \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset}} \psi_{|\omega_1|}^n(X_n, \underline{X}_{\omega_1}) \psi_{|\omega_2|}^m(X'_m, \underline{X}_{\omega_2}) e^{-\mathcal{V}_{|(\omega_1 \cup \omega_2)^c|}^\varepsilon(\underline{X}_{(\omega_1 \cup \omega_2)^c})}. \end{aligned}$$

Using the invariance under permutation and (5.3.10)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int g_n(Z_n) h_m(Z'_m) \sum_{\substack{\omega_1, \omega_1 \subset [1, p] \\ \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset}} \psi_{|\omega_1|}^n(X_n, \underline{X}_{\omega_1}) \psi_{|\omega_2|}^m(X'_m, \underline{X}_{\omega_2}) \\
& \quad \times e^{-\mathcal{V}_{|(\omega_1 \cup \omega_2)^c|}^\varepsilon(\underline{X}_{(\omega_1 \cup \omega_2)^c})} M^{\otimes(n+m)} dZ_n dZ'_m M^{\otimes n} dZ_n M^{\otimes n'} dZ'_n d\underline{X}_p \\
& = \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{p \geq 0} \sum_{p_1 + p_2 + p_3 = p} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \frac{p!}{p_1! p_2! p_3!} \int g_n(Z_n) h_{n'}(Z'_n) \psi_{p_1}^n(X_n, \underline{X}_{p_1}) \psi_{p_2}^1(x_{n+1}, \underline{X}'_{p_2}) \\
& \quad \times \left(M^{\otimes n} dZ_n d\underline{X}_{p_1} \right) \left(M^{\otimes n'} dZ'_n d\underline{X}'_{p_2} \right) \left(e^{-\mathcal{V}_{p_3}^\varepsilon(\underline{X}'_{p_3})} d\underline{X}'_{p_3} \right) \\
& = \mathbb{E}_\varepsilon[g_n] \mathbb{E}_\varepsilon[h_{n'}],
\end{aligned}$$

and in the same way

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int g_n(Z_n) h_m(Z'_m) \sum_{\omega \subset [1, p]} \psi_{|\omega|}^{n,m}(X_n, X'_m, \underline{X}_\omega) \\
& \quad e^{-\mathcal{V}_{|\omega^c|}^\varepsilon(\underline{X}_{\omega^c})} M^{\otimes n} dZ_n M^{\otimes m} dZ'_m d\underline{X}_p \\
& = \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{p \geq 0} \sum_{p_1 + p_2 = p} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \frac{p!}{p_1! p_2!} \int g_n(Z_n) h_m(Z'_m) \psi_{p_1}^{n,m}(X_n, X'_m, \underline{X}_{p_1}) \\
& \quad e^{-\mathcal{V}_{p_2}^\varepsilon(\underline{X}'_{p_2})} M^{\otimes(n+m)} dZ_n dZ'_m d\underline{X}_{p_1} d\underline{X}'_{p_2} \\
& = \sum_{p_1 \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p_1!} \int g_n(Z_n) h_m(Z'_m) \psi_{p_1}^{n,m}(X_n, X'_m, \underline{X}_{p_1}) M^{\otimes(n+m)} dZ_n dZ'_m d\underline{X}_{p_1} d\underline{X}'_{p_2}.
\end{aligned}$$

We use again Penrose tree inequality,

$$(5.3.13) \quad \left| \psi_{|\omega|}^{n,m}(X_n, X'_m, \underline{X}_{p_1}) \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}(\Omega)} \prod_{(X, Y) \in E(T)} |\varphi(X, Y)|.$$

Fix $\tau_{-x_1} X_n$ and $\tau_{-x'_1} X'_m$. Integrating a constraint $\varphi(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$ provides a factor $\mathbf{c}_d \varepsilon^d$, $\varphi(X_n, \underline{x}_j)$ a factor $n \mathbf{c}_d \varepsilon^d$, $\varphi(X'_m, \underline{x}_j)$ a factor $m \mathbf{c}_d \varepsilon^d$ and $\varphi(X_n, X'_m)$ a factor $nm \mathbf{c}_d \varepsilon^d$. Denoting $d_0, d'_0, d_1, \dots, d_p$ the degrees of $X_n, X'_m, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m$ we get

$$\begin{aligned}
(5.3.14) \quad & \left| \int \psi_{|\omega|}^{n,m}(X_n, X'_m, \underline{X}_{p_1}) d\underline{X}_p dx_1 dx'_1 \right| \\
& \leq \sum_{\substack{d'_0, d_0, \dots, d_p \geq 1 \\ d'_0 + d_0 + \dots + d_p = 2p}} \frac{p!}{(d'_0 - 1)(d_0 - 1)! \dots (d_p - 1)!} n^{d_0} m^{d'_0} (\mathbf{c}_d \varepsilon^d)^{+1} \\
& \leq p! (\mathbf{c}_d \varepsilon^d)^{p+1} nm e^{n+m+p}.
\end{aligned}$$

We can integrate on the rest of parameters using (5.3.2) and (5.3.3), and finally

$$\begin{aligned}
& \mu_\varepsilon \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\mu_\varepsilon^{n+m}} \sum_{\underline{i}_{n+m}} g_n(\mathbf{Z}_{\underline{i}_n}) h_m(\mathbf{Z}_{\underline{i}_{n+1, n+m}}) \right] - \mathbb{E}_\varepsilon[g_n] \mathbb{E}_\varepsilon[g] \right) \\
& \leq c_0 c'_0 \mu_\varepsilon \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} p! (\mathbf{c}_d \varepsilon^d)^{p+1} nm e^{n+m+p} \\
& \leq \mu_\varepsilon \varepsilon^d nm (\mathbf{c}_d e)^{n+m} c_0 c'_0 \sum_{p \geq 0} (e \mathbf{c}_d \varepsilon)^p \\
& \leq \varepsilon C^{n+m+1} \sum_{p \geq 0} (e \mathbf{c}_d \varepsilon)^p
\end{aligned}$$

which converges for ε small enough. ■

Note also the following bound in L^p norms of the fluctuation field.

Theorem 5.3.2

For any $p \in [2, \infty)$, there exists a constant $C_p > 0$ such that

$$(5.3.15) \quad \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left[\zeta_\varepsilon^0(g)^p \right] \right)^{1/p} \leq C_p \|g\|_{L^p(M(v)dz)}.$$

The proof can be found in Appendix A of [BGRS21].

From these estimations we can deduce the following corollary:

Corollary 5.3.3

Let h_n be a test function satisfying the conditions of Theorem 5.3.1. Then there exists a constant $C > 0$ such that

$$(5.3.16) \quad \left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} h_n(\mathbf{Z}_{i_n}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \right| \leq C^n \mu_\varepsilon^{n-1} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\zeta_\varepsilon^0(g)^2 \right]^{1/2} \left(c_0 + \left(\sum_{l=1}^n c_l \right)^{1/2} \right).$$

Proof :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} h_n(\mathbf{Z}_{i_n}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] &= \mu_\varepsilon^{n-1} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{1/2-n} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} h_n(\mathbf{Z}_{i_n}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \\ &= \mu_\varepsilon^{n-1} \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{1/2} \widehat{h}_n(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] + \mathbb{E}_\varepsilon [h_n] \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{1/2} \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \right) \\ &= \mu_\varepsilon^{n-1} \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{1/2} \widehat{h}_n(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] + \mathbb{E}_\varepsilon [h_n] \mathbb{E}_\varepsilon \left[\zeta_\varepsilon^0(g) \mu_\varepsilon^{1/2} (1 - \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon^c}) \right] \right). \end{aligned}$$

By $\mathbb{E}_\varepsilon[\zeta_\varepsilon^0(g)] = 0$ and using Cauchy-Schwarz inequality, we find

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{(i_1, \dots, i_n)} h_n(\mathbf{Z}_{i_n}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \right| \\ &\leq \mu_\varepsilon^{n-1} \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon \left[\widehat{h}_n \right]^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\zeta_\varepsilon^0(g)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}_\varepsilon [h_n] \mathbb{E}_\varepsilon \left[\zeta_\varepsilon^0(g)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(\mu_\varepsilon \mathbb{P}_\varepsilon[\Upsilon_\varepsilon^c] \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

We apply now Theorem 5.3.1. The bound on $\mathbb{P}_\varepsilon[\Upsilon_\varepsilon^c]$ given in section 5.2.3 and the bound on the L^p norm of $\zeta_\varepsilon^0(g)$ (5.3.15) lead to the stated corollary. ■

5.4 Clustering estimations

The objective of this section is to bound $G_\varepsilon^{\text{clust}}(t)$ and $G_\varepsilon^{\text{exp}}(t)$, defined by

$$G_\varepsilon^{\text{clust}}(t) := \mathbb{E}_\varepsilon \left[\zeta_\varepsilon^t(h) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon^c} \right] - \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_K \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_{n_K}} \Phi_n^0[h] \left(\mathbf{Z}_{i_{n_K}}(0) \right) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right],$$

$$G_\varepsilon^{\text{exp}}(t) := \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_{k-1} \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \sum_{n_k > 2^k + n_{k-1}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{\underline{i}_{n_k}} \Phi_{\underline{n}}^0[h] \left(\mathbf{Z}_{\underline{i}_{n_k}}(t - k\theta) \right) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right].$$

Proposition 5.4.1

For $\varepsilon > 0$ small enough,

$$(5.4.1) \quad |G_\varepsilon^{\text{exp}}(t) + G_\varepsilon^{\text{rec}}(t)| \leq C \|g\| \|h\| \left(\varepsilon^{1/2} (Ct)^{2t/\theta} + t\theta^{1/2} \right)$$

To obtain the stated result, we need first the following bounds on the pseudotrajectory developments without recollisions of type $\Phi_{\underline{n}}^0[h]$:

Proposition 5.4.2

Fix $k \in \mathbb{N}$ and $\underline{n} := (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ with $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$. Then

$$(5.4.2) \quad \int_{x_1=0} \sup_{y \in \Lambda} |\Phi_{\underline{n}}^0[h](\tau_y Z_{n_k})| M^{\otimes n_k} dV_{n_k} dX_{2, n_k} \leq \frac{\|h\|}{\mu_\varepsilon^{n_k-1}} C^{n_k} \theta^{n_k - n_{k-1}} t^{n_k-1-1},$$

and, for $m \in [1, n_k]$,

$$(5.4.3) \quad \int_{x_1=0} \sup_{y \in \Lambda} |\Phi_{\underline{n}}^0[h](\tau_y Z_{n_k}) \Phi_{\underline{n}}^0[h](\tau_y Z_{n_k-m+1, 2n_k-m})| M^{\otimes (2n_k-m)} dV_{2n_k-m} dX_{2, 2n_k-m} \\ \leq \frac{\|h\|^2}{n_k^m \mu_\varepsilon^{2n_k-m-1}} C^{n_k} \theta^{n_k - n_{k-1}} t^{m+n_k-1-1}.$$

Indeed using Corollary 5.3.3 and the previous estimations,

$$\left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{\underline{i}_{n_k}} \Phi_{\underline{n}}^0[h] \left(\mathbf{Z}_{\underline{i}_{n_k}}(t - k\theta) \right) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \right| \\ \leq \|g\| \|h\| \left(C^{n_k} \theta^{n_k - n_{k-1}} t^{n_k-1-1} + \left(\sum_{m=1}^{n_k} C^{n_k} \theta^{n_k - n_{k-1}} t^{n_k-1-1+m} \right)^{1/2} \right) \\ \leq \|g\| \|h\| C^{n_k} \theta^{(n_k - n_{k-1})/2} t^{n_k-1},$$

and in the same way,

$$\mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{\underline{i}_{n_K}} \Phi_{\underline{n}}^0[h] \left(\mathbf{Z}_{\underline{i}_{n_K}}(0) \right) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] = O \left(\varepsilon^{1/2} \|g\| \|h\| C^{n_k} t^{n_k-1} \right).$$

Summing on all possible (n_1, \dots, n_k) ,

$$(5.4.4) \quad |G_\varepsilon^{\text{exp}}(t)| \leq \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_{k-1} \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \sum_{n_k > 2^k + n_{k-1}} \|g\| \|h\| C^{n_k} \theta^{(n_k - n_{k-1})/2} t^{n_k-1} \\ \leq C \|g\| \|h\| \sum_{k=1}^K 2^{k^2} (Ct\theta^{1/2})^{2k} \leq C \|g\| \|h\| t\theta^{1/2}$$

because the series converges for θ small enough, and

$$(5.4.5) \quad |G_\varepsilon^{\text{clust}}(t)| \leq C \|g\| \|h\| \varepsilon^{1/2} + \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_K \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \varepsilon^{1/2} \|g\| \|h\| C^{n_k} t^{n_k-1} \leq C \|g\| \|h\| \varepsilon^{1/2} 2^{K^2} (Ct)^{2^K}.$$

This concludes the proof of (5.4.1).

Proof of (5.4.2) : We recall that

$$\Phi_{\underline{n}}^0[h] = \Phi_{n_{K-1}, n_K}^{0, \theta} \circ \Phi_{n_{K-2}, n_{K-1}}^{0, \theta} \cdots \circ \Phi_{1, n_1}^{0, \theta}[h] = \frac{1}{n_k!} \sum_{(s_i, \bar{s}_i)_{i \leq n_k-1}} \prod_i \bar{s}_i \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{\underline{n}}} h(Z_{n_k}(k\theta))$$

and thus

$$(5.4.6) \quad |\Phi_{\underline{n}}^0[h]| \leq \frac{\|h\|}{n_k!} \sum_{(s_i, \bar{s}_i)_{i \leq n_k-1}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{\underline{n}}}$$

where $\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{\underline{n}} \subset \mathcal{D}_\varepsilon^{n_k}$ is the set of initial parameters Z_{n_k} such that the pseudotrajectory $Z_{n_k}(\tau, (s_i, \bar{s}_i)_i, (0)_j, Z_{n_k})$ has n_l remaining particles at time $(k-l)\theta$. Note that the left hand side of (5.4.6) is invariant under translations. Hence it is sufficient to fix $x_1 = 0$ and integrate with respect to (X_{2, n_k}, V_{n_k}) .

We define the the *clustering tree* $T^> := (\nu_i, \bar{\nu}_i)_{1 \leq i \leq n_k-1}$ where the i -th collision happens between particles ν_i and $\bar{\nu}_i$ (and $\nu_i < \bar{\nu}_i$). Since in the present section pseudotrajectories have no recollision, the clustering tree is just the collision graph where we forget the collisions times (but not their order). It can be used to parametrize a partition of $\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)_i}^{\underline{n}}$.

Let us fix a clustering tree. We perform the following change of variables

$$X_{2, n_k} \mapsto (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n_k-1}), \quad \forall i \in [1, n_k-1], \quad \hat{x}_i := x_{\nu_i} - x_{\bar{\nu}_i}$$

Fix then t_{i+1} the time of the $(i+1)$ -th collision, as well as the relative positions $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}$. We denote $T_i = \theta$ if $i \leq n_k - n_{k-1}$, t else (at least $n_k - n_{k-1}$ clustering collisions happen before time θ) and the i -th collision set as

$$B_{T^>, i} := \left\{ \hat{x}_i \mid \exists \tau \in (0, T_i \wedge t_{i+1}), |x_{\nu_i}(\tau) - x_{\bar{\nu}_i}(\tau)| \leq \varepsilon \right\}.$$

Because particles $x_{\nu_i}(\tau)$ and $x_{\bar{\nu}_i}(\tau)$ are independent until their first meeting, we can perform the change of variable $\hat{x}_i \mapsto (t_i, \eta_i)$ where t_i is the first meeting time and

$$\eta_i := \frac{x_{\nu_i}(t_i) - x_{\bar{\nu}_i}(t_i)}{|x_{\nu_i}(t_i) - x_{\bar{\nu}_i}(t_i)|}.$$

This sends the Lebesgue measure $d\hat{x}_i$ to the measure $\mu_\varepsilon^{-1}((v_{\nu_i}(t_i) - v_{\bar{\nu}_i}(t_i)) \cdot \eta_i)_+ d\eta_i dt_i$ and

$$\int \mathbb{1}_{B_{T^>, i}} d\hat{x}_i \leq \frac{C}{\mu_\varepsilon} |v_{\nu_i}(t_i) - v_{\bar{\nu}_i}(t_i)| \int_0^{T_i \wedge t_{i+1}} dt_i.$$

We sum now on every possible edge $(\nu_i, \bar{\nu}_i)$:

$$\sum_{(\nu_i, \bar{\nu}_i)} |v_{\nu_i}(t_i) - v_{\bar{\nu}_i}(t_i)| \leq 2n_k \sum_k |v_k(t_i)| \leq 2n_k \left(n_k \sum_k |v_k(t_i)|^2 \right)^{1/2} \leq n_k (n_k + |V_{n_k}|^2)$$

using that the kinetic energy is decreasing for the pseudotrajectory. Hence

$$\begin{aligned} \int \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^n} d\hat{x}_1 \cdots d\hat{x}_{n_k-1} &\leq \left(\frac{Cn_k}{\mu_\varepsilon} \right)^{n_k-1} (n_k + |V_{n_k}|^2)^{n_k-1} \int_0^{T_{n_k}} dt_{n_k} \cdots \int_0^{T_1 \wedge t_2} dt_1 \\ &\leq \left(\frac{Cn_k}{\mu_\varepsilon} \right)^{n_k-1} (n_k + |V_{n_k}|^2)^{n_k-1} \frac{t^{n_k-1-1}}{(n_{k-1}-1)!} \frac{\theta^{n_k-n_{k-1}}}{(n_k-n_{k-1})!} \\ &\leq \left(\frac{6C}{\mu_\varepsilon} \right)^{n_k-1} (n_k + |V_{n_k}|^2)^{n_k-1} t^{n_k-1-1} \theta^{n_k-n_{k-1}}, \end{aligned}$$

using the Stirling's formula. For $A, B > 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$(A+x^2)^B e^{-\frac{x^2}{4}} = B^B \left(\frac{A+x^2}{B} e^{-\frac{A+x^2}{4B}} \right)^B e^{\frac{A}{4}} \leq \left(\frac{4B}{e} \right)^B e^{\frac{A}{4}}.$$

Thus for some constant $C > 0$,

$$\int (n_k + |V_{n_k}|^2)^{n_k-1} e^{-\frac{|V_{n_k}|^2}{2}} dV_{n_k} \leq (Cn_k)^{n_k-1} \int e^{-\frac{|V_{n_k}|^2}{4}} dV_{n_k} \leq (2^{d/2} Cn_k)^{n_k-1}$$

and

$$\begin{aligned} \int \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^n} M^{\otimes n_k} dX_{2, n_k} dV_{n_k} &\leq \sum_{T^>} \int \prod_{i=1}^{n_k-1} \mathbb{1}_{B_{T^>, i}} d\hat{x}_i M^{\otimes n_k} dV_{n_k} \\ &\leq C \left(\frac{C}{\mu_e} \right)^{n_k-1} t^{n_k-1-1} \theta^{n_k-n_{k-1}} \int (n_k + |V_{n_k}|^2)^{n_k-1} M^{\otimes n_k} dV_{n_k} \\ &\leq C \left(\frac{C}{\mu_e} \right)^{n_k-1} t^{n_k-1-1} \theta^{n_k-n_{k-1}} n_k^{n_k-1}, \end{aligned}$$

(where the constants C change from line to line).

Finally we sum on the 4^{n_k-1} possible $(s_i, \bar{s}_i)_i$ and, dividing by the remaining $(n_k)!$, this gives the expected estimation. \blacksquare

Proof of (5.4.3) : We begin as in the previous paragraph

$$\begin{aligned} &\left| \Phi_{\underline{n}}^0[h](Z_{n_k}) \Phi_{\underline{n}}^0[h](Z_{n_k-m+1, 2n_k-m}) \right| \\ &\leq \frac{\|h\|^2}{(n_k!)^2} \sum_{\substack{(s_i, \bar{s}_i)_{i \leq n_k-1} \\ (s'_i, \bar{s}'_i)_{i \leq n_k-1}}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^n}(Z_{n_k}) \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s'_i, \bar{s}'_i)}^n}(Z_{n_k-m+1, 2n_k-m}). \end{aligned}$$

We have to consider two pseudotrajectories $Z(\tau) := Z(\tau, Z_{n_k})$ and $Z'(\tau) := Z(\tau, Z_{n_k-m+1, 2n_k-m})$. Note again that the right hand side is invariant under translation, hence we can fix $x_1 = 0$.

We construct the clustering tree $T^>$ as follows. We merge the collision graphs of the first and of the second pseudotrajectory. Then we look at edges one by one in temporal order, keeping only those which do not create a cycle. In this way we construct a tree which connects all the vertices. This leads to a graph with ordered edges. We finally remove then the non-clustering collisions and obtain the clustering tree $T^> := (\nu_i, \bar{\nu}_i)$. As before, such trees induce a partition of

$$\left\{ Z_{2n_k-m} \in (\Lambda \times \mathbb{R}^d)^{2n_k-m} \mid Z_{n_k} \in \mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^n, (Z_{n_k-m+1, 2n_k-m}) \in \mathcal{R}_{(s'_i, \bar{s}'_i)}^n \right\}.$$

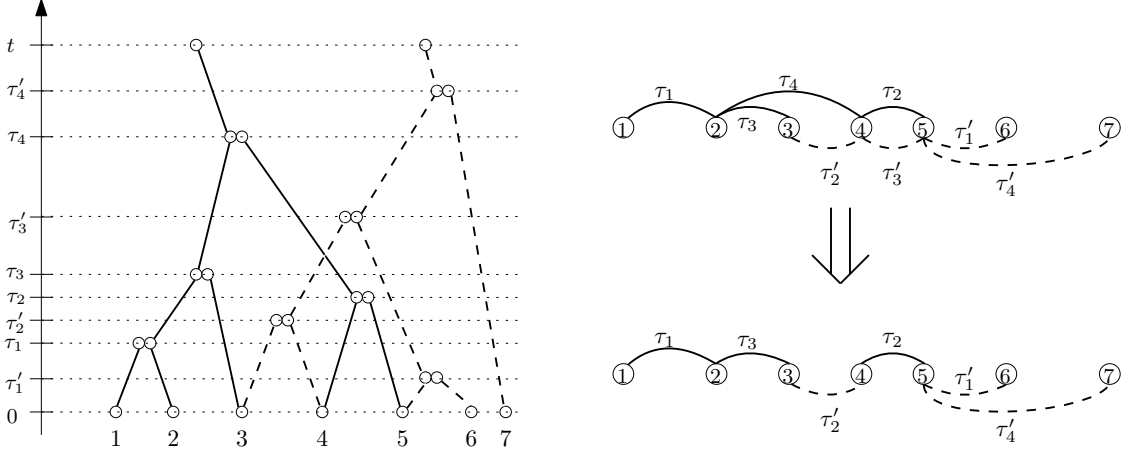


Figure 5.5 – Example of construction of a clustering tree

The rest of the proof is almost identical to the proof of (5.4.2). Fix the clustering tree, and perform the following change of variables

$$X_{2,2n_k-m} \mapsto (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{2n_k-m-1}), \quad \forall i \in [1, 2n_k - m - 1], \quad \hat{x}_i := x_{\nu_i} - x_{\bar{\nu}_i}.$$

Fix t_{i+1} , the time of the $(i+1)$ -th collision and relative positions $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}$. We define the i -th collision sets as

$$B_{T>,i} := \left\{ \hat{x}_i \mid \exists \tau \in (0, T_i \wedge t_{i+1}), \quad |x_{\nu_i}(\tau) - x_{\bar{\nu}_i}(\tau)| \leq \varepsilon \text{ or } |x'_{\nu_i}(\tau) - x'_{\bar{\nu}_i}(\tau)| \leq \varepsilon \right\}$$

where $T_i = \theta$ for the $(n_k - n_{k-1})$ first collisions, t else. By the same computation as above,

$$\begin{aligned} & \int \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^n}(Z_{n_k}) \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s'_i, \bar{s}'_i)}^n}(Z_{n_k-m+1, 2n_k-m}) M^{\otimes(2n_k-m)} dX_{2,2n_k-m} dV_{2n_k-m} \\ & \leq \sum_{T>} \int \prod_{i=1}^{2n_k-m-1} \mathbb{1}_{B_{T>,i}} d\hat{x}_i M^{\otimes(2n_k-m)} dV_{2n_k-m} \\ & \leq C \left(\frac{C}{\mu_\varepsilon} \right)^{2n_k-m-1} t^{n_{k-1}+m-1} \theta^{n_k-n_{k-1}} (2n_k-m)^{2n_k-m-1} \\ & \leq C \frac{(C)^{2n_k}}{\mu_\varepsilon^{2n_k-m-1}} t^{n_{k-1}+m-1} \theta^{n_k-n_{k-1}} n_k^{2n_k-m-1}. \end{aligned}$$

We sum on all the possible parameters $(s_i, \bar{s}_i)_i$ and $(s'_i, \bar{s}'_i)_i$ and get

$$\begin{aligned} & \int \left| \Phi_n^0[h](Z_{n_k}) \Phi_n^0[h](Z_{n_k-m+1, 2n_k-m}) \right| M^{\otimes(2n_k-m)} dX_{2,2n_k-m} dV_{2n_k-m} \\ & \leq \|h\|^2 \frac{n_k^{2n_k-m-1} C^{2n_k}}{(n_k!)^2 \mu_\varepsilon^{2n_k-m-1}} t^{n_{k-1}+m-1} \theta^{n_k-n_{k-1}} \end{aligned}$$

which provides the announced result, by Stirling formula. \blacksquare

5.5 Estimation of non-pathological recollisions

The objective of this section is to bound

$$G_\varepsilon^{\text{rec},1}(t) := \sum_{\substack{1 \leq k \leq K-1 \\ 1 \leq k' \leq K'}} \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_k \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \sum_{\substack{n'' \geq n' \geq n_k}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{\hat{i}_{n''}} \Phi_{n, n', n''}^{>, k'}[h](Z_{\hat{i}_{n''}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right].$$

Proposition 5.5.1

For ε small enough,

$$(5.5.1) \quad |G_\varepsilon^{\text{rec},1}(t)| \leq \|g\| \|h\| \varepsilon^{\alpha/2} (C't)^{2^{t/\theta} + 2d+6}.$$

It is sufficient to prove the two following estimations:

Proposition 5.5.2

Fix $k \in \mathbb{N}$, $\underline{n} := (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ and $(n', n'') \in \mathbb{N}^2$ with $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k \leq n' \leq n''$. Then

$$(5.5.2) \quad \int \sup_{y \in \Lambda} |\Phi_{\underline{n}, n', n''}^{>, k'}[h](\tau_y Z_{n''})| M^{\otimes n''} dV_{n''} dX_{2, n''} \leq \varepsilon^\alpha \frac{\|h\|}{\mu_\varepsilon^{n''-1}} C^{n''} \theta^{(n''-n_k-2)_+} \delta^2 t^{n_k+2d+4},$$

and, for $m \in [1, n'']$,

$$(5.5.3) \quad \int \sup_{y \in \Lambda} |\Phi_{\underline{n}, n', n''}^{>, k'}[h](\tau_y Z_{n''}) \Phi_{\underline{n}, n', n''}^{>, k'}[h](\tau_y Z_{n''-m+1, 2n''-m})| M^{\otimes (2n''-m)} dV_{2n''-m} dX_{2, 2n''-m} \\ \leq \varepsilon^\alpha \frac{\|h\|^2}{(n'')^m \mu_\varepsilon^{2n''-m-1}} C^{n''} \theta^{(n''-n_k-2)_+} \delta^2 t^{n_k+2d+4+m}.$$

Using these estimations and Corollary 5.3.3,

$$\left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{(i_1, \dots, i_{n''})} \Phi_{\underline{n}, n', n''}^{>, k'}[h](Z_{i_{n''}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\mathcal{R}_\varepsilon} \right] \right| \\ \leq \|h\| \|g\| \left(\varepsilon^\alpha C^{n''} \theta^{(n''-n_k-2)_+} \delta^2 t^{n_k+2d+4} + \left(\sum_{m=1}^{n''} \varepsilon^\alpha C^{n''} \theta^{(n''-n_k-2)_+} \delta^2 t^{n_k+2d+4+m} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \leq \|g\| \|h\| \delta \varepsilon^{\alpha/2} C^{n''} \theta^{(n''-n_k-2)_+} / 2 t^{\frac{n''+n_k}{2} + 2d+4} \\ \leq \|g\| \|h\| \delta \varepsilon^{\alpha/2} (Ct)^{n_k+2d+5} (Ct\theta)^{(n''-n_k-2)_+} / 2.$$

Thus

$$(5.5.4) \quad |G_\varepsilon^{\text{rec},1}(t)| \leq \sum_{\substack{1 \leq k \leq K-1 \\ 1 \leq k' \leq K'}} \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_k \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \sum_{n'' \geq n' \geq n_k} \|g\| \|h\| \delta \varepsilon^{\alpha/2} (Ct)^{n_k+2d+5} (Ct\theta)^{(n''-n_k-2)_+} / 2 \\ \leq \|g\| \|h\| K' \delta \varepsilon^{\alpha/2} K^{K^2} (Ct)^{2K+2d+5} \\ \leq \|g\| \|h\| \varepsilon^{\alpha/2} (C't)^{2K+2d+6}$$

using that $K'\delta \leq t$.

Proof of (5.5.2) : We recall that the pseudotrajectory development takes the form

$$\Phi_{\underline{n}, n', n''}^{>, k'}[h](Z_{n''}) = \Phi_{n', n''}^{>, \delta} \circ \Phi_{n_k, n'}^{0, k'\delta} \circ \Phi_{\underline{n}}^0[h](Z_{n''}) \\ = \frac{1}{n''!} \sum_{\substack{((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j) \\ \kappa_j \leq \gamma-1}} \prod_i \bar{s}_i \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)}} h(Z(k\theta + k'\delta, ((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j), Z_{n''})).$$

Here $\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)}^>$ is the set of initial configurations $Z_{n''}$ such that the pseudotrajectory has:

- n' particles at time δ ,
- n_l particles at time $k'\delta + (k - l)\theta$,
- at least one recollision,
- no recollision after time δ
- with no pathological recollision (thanks to the asymmetric conditioning).

Lemma 5.5.3

There exist a constant $\alpha \in (0, 1)$ such that for any $\underline{n}, n', n'', k'$ and $((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)$,

$$\int \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)}^>} M^{\otimes n''} dX_{2, n''} dV_{n''} \leq C' \left(\frac{C'}{\mu_\varepsilon} \right)^{n''-1} (n'')^{n''} \delta^{2\theta(n''-n_k-2)+t^{n_k+2d+4}} \varepsilon^\alpha$$

Proof : We may define the clustering tree $T^>$ as before, by looking at collisions in temporal order and keeping only the clustering collisions. However, this will not be sufficient to characterize the initial data.

Let (q, \bar{q}) (with $q < \bar{q}$) be the first two particles having a non-clustering collision, τ_{cycle} the time of this collision and $c \in [1, n'' - 1]$ such that τ_{cycle} lies between the times of the c -th and the $(c + 1)$ -th clustering collision. The parameters $(T^>, (q, \bar{q}, c))$ provide a partition of the set of initial data.

Considering the change of variables

$$\forall i \in [1, n'' - 1], \hat{x}_i := x_{\nu_i} - x_{\bar{\nu}_i}, X_{2, n''} \mapsto (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n''-1})$$

with $T^> =: (\nu_i, \bar{\nu}_i)_{i \leq n''-1}$, we can construct as in the previous section a sequence of sets $B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^i$ depending only on $V_{n''}$ and $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}$ which condition the relative position \hat{x}_i . The only difference is that the construction has to take into account the addition of one cycle. We define in the following $(T_i)_i$ by $T_i = \delta$ if i is smaller than $n'' - n'$, θ if i is between $n'' - n' + 1$ and $n'' - n_k$ and t else (T_i “counts” the number of clustering collisions in $[0, \delta]$, $[\delta, k'\delta]$ and $[k'\delta, k'\delta + k\theta]$).

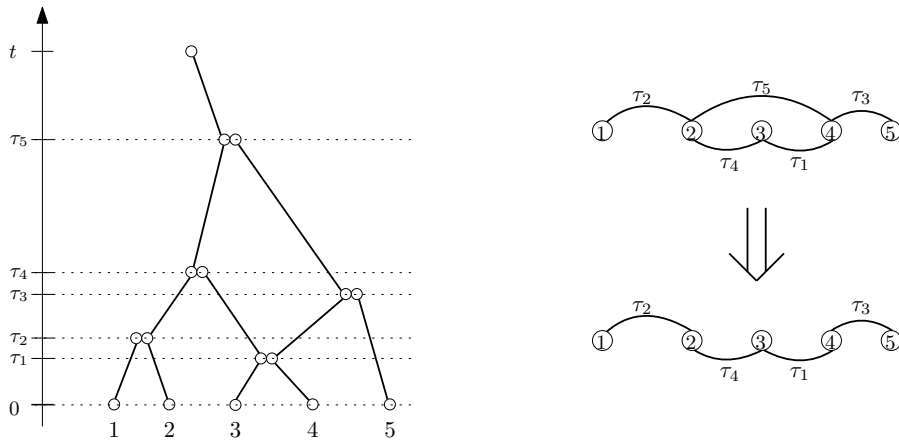


Figure 5.6 – Example of construction of a clustering tree. Here $(q, \bar{q}, c) = (2, 4, 4)$.

We need to characterize one particular collision in $T^>$, which conditions the appearance of the non-clustering collision, and for which we have to adapt the definition of $B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^i$.

Definition 5.5.1

We call *parent* p of a group of particles $(q_k)_k$ at time τ the p -th edge with the largest p such that one of the particles $(q_k)_k$ is deflected at $\tau_p \leq \tau$. If such a parent does not exist, then we set $\tau_p := 0$.

We define the *connector* k of two particles (q, \bar{q}) the index of the first edge, going backwards from τ to zero, realizing a connected path between q and \bar{q} .

The *tutor* j of two particles (q, \bar{q}) at time τ is the largest j with $t_j \leq \tau$ such that j is either the parent at time τ or the connector of (q, \bar{q}) .

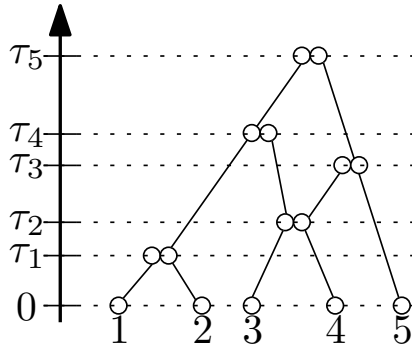


Figure 5.7 – In this pseudotrajectory, the parent of particles $(2, 5)$ at time τ_5 is the collision between 1 and 2 at time τ_1 and the connector the collision between 3 and 4 at time τ_2 .

Let j be the tutor of (q, \bar{q}) before τ_{cycle} . We define

$$B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^j := \left\{ \hat{x}_j \mid \exists \tau \in (0, T_j \wedge t_{j+1}), |\mathbf{x}_{\nu_j}(\tau) - \mathbf{x}_{\bar{\nu}_j}(\tau)| \leq \varepsilon \right. \\ \left. \text{and the } j\text{-th collision is the tutor of the cycle} \right\}.$$

Note that, by construction, after the clustering time τ_j particles q and \bar{q} do not change their velocities.

Proposition 5.5.4

Assume that $d \geq 3$. Then, denoting by $w_q, w_{\bar{q}}, w_{q_j}, w_{\bar{q}_j}$ the velocities of $q, \bar{q}, q_j, \bar{q}_j$ at time t_{j-1}^+ (which are the same than at time t_j^-), and if the tutor j is the parent of (q, \bar{q}) , one has

$$(5.5.5) \quad \int \mathbb{1}_{B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^j} d\hat{x}_j \leq \frac{C}{\mu_\varepsilon} (\mathbb{V}t)^d \times \left(\frac{\mathbb{V}\varepsilon |\log \varepsilon| \mathbb{1}_{q \neq \bar{q}_j}}{|w_q - w_{\bar{q}_j}|} + \frac{\mathbb{V}\varepsilon |\log \varepsilon| \mathbb{1}_{\bar{q} \neq \bar{q}_j}}{|w_{\bar{q}} - w_{\bar{q}_j}|} + \frac{\mathbb{V}t}{\mu_\varepsilon} \right);$$

otherwise if the tutor is a connector but not a parent,

$$(5.5.6) \quad \int \mathbb{1}_{B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^j} d\hat{x}_j \\ \leq \frac{C}{\mu_\varepsilon} (\mathbb{V}\theta)^{d+1} \times \left[\sum_{\zeta} \mathbb{1}_{\sin(w_q - w_{\bar{q}}, \zeta) \leq \varepsilon} + (\mathbb{V}\theta)^d \min \left(1, \frac{\varepsilon \mathbb{1}_{(q, \bar{q}) \neq (q_j, \bar{q}_j)}}{\sin(w_q - w_{\bar{q}}, w_{q_j} - w_{\bar{q}_j})} \right) \right]$$

where the sum runs over $\zeta \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ contained in the ball of radius $\mathbb{V}\theta$.

The above proposition uses the tutor to gain some smallness from the strong geometric constraint. However, the estimates in (5.5.5)-(5.5.6) lead to singularities in the relative velocities. Those singularities have to be integrated out either by using available parents (if any) or by using the Gaussian measure of the velocity distribution at time 0. The following proposition summarises the different possibilities.

Proposition 5.5.5

(i) Let $q \neq \bar{q}$ be two particles of velocities $w_q, w_{\bar{q}}$ with parent ℓ . Let $\zeta \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Then one has that

$$(5.5.7) \quad \int \left(\frac{\mathbb{V}\varepsilon |\log \varepsilon|}{|w_q - w_{\bar{q}}|} + \mathbb{1}_{\sin(w_q - w_{\bar{q}}, \zeta) \leq \varepsilon} \right) \mathbb{1}_{B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^\ell} d\hat{x}_\ell \leq \frac{C}{\mu_\varepsilon} \mathbb{V}\varepsilon |\log \varepsilon| (\delta \mathbb{1}_{\ell=1} + t \mathbb{1}_{\ell \neq 1}).$$

(ii) Let $q, \bar{q}, q_j, \bar{q}_j$ be particles with velocities $w_q, w_{\bar{q}}, w_{q_j}, w_{\bar{q}_j}$ and parent ℓ (say deflecting q), such that (q, q_j) and (\bar{q}, \bar{q}_j) belong to different connected components of the dynamical graph.

$$(5.5.8) \quad \int \min \left(1, \frac{\varepsilon \mathbb{1}_{\{q, \bar{q}\} \neq \{q_j, \bar{q}_j\}}}{\sin(w_q - w_{\bar{q}}, w_{q_j} - w_{\bar{q}_j})} \right) \mathbb{1}_{B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^\ell} d\hat{x}_\ell \leq \frac{C}{\mu_\varepsilon} \mathbb{V}\varepsilon |\log \varepsilon| (\delta \mathbb{1}_{\ell=1} + t \mathbb{1}_{\ell \neq 1}) \\ \times \left(1 + \frac{\theta \mathbb{V}\mathbb{1}_{(q, q_j) \text{ encounter at } \tau_\ell}}{|u_q + u_{q_j} - (w_{\bar{q}_j} + w_{\bar{q}})|} + \frac{t \mathbb{V}\mathbb{1}_{q=q_j} \mathbb{1}_{\bar{q} \neq \bar{q}_j}}{|w_{\bar{q}} - w_{\bar{q}_j}|} \right),$$

denoting by u the pre-collisional velocities.

(iii) Let $q, \bar{q}, q_j, \bar{q}_j$ be particles with velocities $w_q, w_{\bar{q}}, w_{q_j}, w_{\bar{q}_j}$ such that $(q), (q_j)$ and (\bar{q}, \bar{q}_j) belong to different connected components of the dynamical graph. Let ℓ be the first parent of $q, \bar{q}, q_j, \bar{q}_j$ deflecting only one particle of the group.

$$(5.5.9) \quad \int \frac{\mathbb{V}\varepsilon |\log \varepsilon|}{|w_q + w_{q_j} - (w_{\bar{q}_j} + w_{\bar{q}})|} \mathbb{1}_{B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^\ell} d\hat{x}_\ell \leq \frac{C}{\mu_\varepsilon} \mathbb{V}\varepsilon |\log \varepsilon| (\delta \mathbb{1}_{\ell=1} + t \mathbb{1}_{\ell \neq 1}).$$

(iv) For $q \neq \bar{q}, \zeta \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$

$$(5.5.10) \quad \int M(w_q) M(w_{q_j}) M(w_{\bar{q}}) M(w_{\bar{q}_j}) \left[\frac{\mathbb{V}\varepsilon |\log \varepsilon|}{|w_q - w_{\bar{q}}|} + \frac{\mathbb{V}\varepsilon |\log \varepsilon|}{|w_q + w_{q_j} - w_{\bar{q}} - w_{\bar{q}_j}|} \right. \\ \left. + \min \left(1, \frac{\varepsilon \mathbb{1}_{(q, \bar{q}) \neq (q_j, \bar{q}_j)}}{\sin(w_q - w_{\bar{q}}, w_{q_j} - w_{\bar{q}_j})} \right) \right. \\ \left. + \mathbb{1}_{\sin(w_q - w_{\bar{q}}, \zeta) \leq \varepsilon} \right] dw_q dw_{q_j} dw_{\bar{q}} dw_{\bar{q}_j} \leq C \mathbb{V}\varepsilon |\log \varepsilon|.$$

Propositions 5.5.4 and 5.5.5 have been proved in [BGSRS21].

We can then integrate and sum on the $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n''-1})$ and $(T^>, (q, \bar{q}, c))$ and give a bound on

$$\sum_{(q, \bar{q}, c)} \sum_{T^>} \int d\hat{x}_1 \mathbb{1}_{B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^1} \int d\hat{x}_2 \dots \int d\hat{x}_{n''-1} \mathbb{1}_{B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^{n''-1}}.$$

We integrate the constraints iteratively using successively Propositions 5.5.4 and 5.5.5:

one obtains

$$\begin{aligned} & \int \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)}} M^{\otimes n''} dX_{2, n''} dV_{n''} \\ & \leq \left(\frac{C}{\mu_\varepsilon} \right)^{n''-1} (n'')^{2n''+2} \frac{\delta^{\max(n''-n', 1)}}{\max(n''-n', 1)!} \frac{\theta^{(n'-n_k-1)_+}}{(n'-n_k-1)_+!} \frac{t^{n_k}}{n_k!} (\mathbb{V}t)^{2d+4} \varepsilon |\log \varepsilon| \\ & \leq C' \left(\frac{C'}{\mu_\varepsilon} \right)^{n''-1} (n'')^{n''} \delta^2 \theta^{(n''-n_k-2)_+} t^{n_k+2d+4} \varepsilon^\alpha \end{aligned}$$

using that $\mathbb{V} := |\log \varepsilon|$. ■

We obtain the expected result by summing on the

$$((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j) \in \{\pm 1\}^{2n''-1} \times [0, \gamma - 1]^{n''},$$

and dividing by $n''!$. ■

Proof of (5.5.3) : We use first the same bound of the previous section

$$\begin{aligned} & \left| \Phi_{\underline{n}, n', n''}^{>, k'} [h](Z_{n''}) \Phi_{\underline{n}', n', n''}^{>, k'} [h](Z_{n''-m+1, 2n''-m}) \right| \\ & \leq \frac{\|h\|^2}{(n''!)^2} \sum_{\substack{((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j) \\ \kappa_j \leq \gamma-1}} \sum_{\substack{((s'_i, \bar{s}'_i)_i, (\kappa'_j)_j) \\ \kappa'_j \leq \gamma-1}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)}}(Z_{n''}) \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s'_i, \bar{s}'_i)_i, (\kappa'_j)_j)}}(Z_{n''-m+1, 2n''-m}). \end{aligned}$$

Note that the formula is invariant under translation. We can then fix $x_1 = 0$ and integrate with respect the other variables.

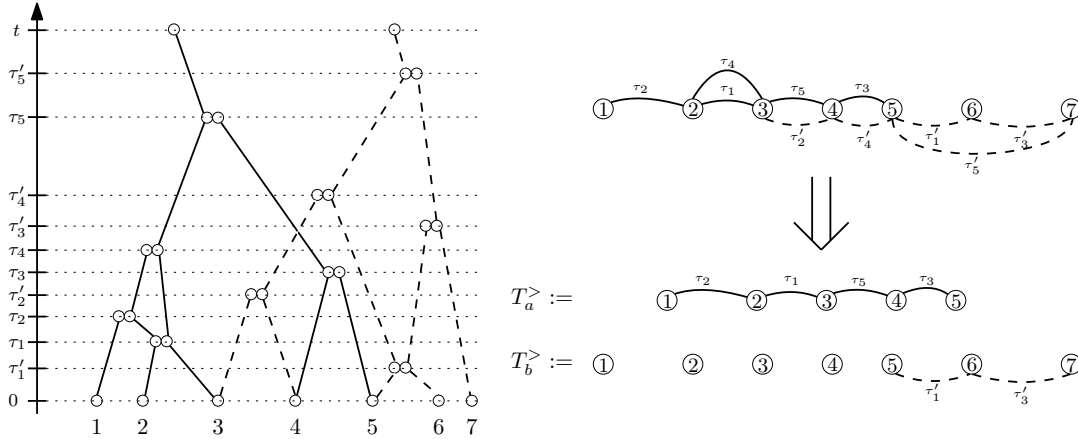


Figure 5.8 – Example of construction of the clustering trees

Fix $((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)$ and $((s'_i, \bar{s}'_i)_i, (\kappa'_j)_j)$. There are two pseudotrajectories. We construct as in the proof of (5.5.2) the clustering tree $T_a^>$ and the recollision parameters (q, \bar{q}, c) for the first recollision. We construct next the clustering graph $T_b^>$ of $Z'(\tau)$ by induction. Let $(\nu_i, \bar{\nu}_i)_{i \leq I}$ be the edges of the collision graph of $Z'(\tau)$, with temporal order. We begin by $T_0 = \emptyset$. At the i -th step, we add $(\nu_i, \bar{\nu}_i)$ to T_{i-1} only if it does not create a cycle in the graph $T_a^> \cup T_{i-1} \cup \{(\nu_i, \bar{\nu}_i)\}$. At the end we have constructed the graph $T_b^> := T_I$ and $T_a^> \cup T_b^>$ is a simply connected graph which connects all the particles. Note that $T_b^>$ has $n'' - m$ edges.

We denote $T_a^> := (\nu_i, \bar{\nu}_i)_{i \in [1, n''-1]}$ and $T_b^> := (\nu_i, \bar{\nu}_i)_{i \in [n'', 2n''-m-1]}$ (with $\nu_i < \bar{\nu}_i$) and we perform the change of variables

$$\forall i \in [1, 2n'' - m - 1], \hat{x}_i := x_{\nu_i} - x_{\bar{\nu}_i}, X_{2, 2n''-m} \mapsto (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{2n''-m-1}).$$

Fixing $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n''-1})$, we construct first a sequence of clustering sets $B_{T_b^>}^i$ as in the proof of (5.4.3). Then we can reproduce the same strategy and

$$\begin{aligned} & \sum_{T_b^>} \int_{B_{T_b^>}^{n''}} d\hat{x}_{n''} \cdots \int_{B_{T_b^>}^{2n''-m-1}} d\hat{x}_{2n''-m-1} \\ & \leq \left(\frac{C'(2n'' - m)}{\mu_\varepsilon} \right)^{n''-m} (|V_{2n''-m}|^2 + 2n'' - m)^{n''-m} \frac{t^{n''-m}}{(n'' - m)!}. \end{aligned}$$

Secondly, proceeding as in the proof of (5.5.2), we construct a sequence of clustering sets $B_{T_a^>, (q, \bar{q}, c)}^i$ (for $i \leq n'' - 1$) of relative positions \hat{x}_i . Reproducing the same estimations,

$$\begin{aligned} & \int \mathbb{1}_{\mathcal{R}((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)}(Z_{n''}) \mathbb{1}_{\mathcal{R}((s'_i, \bar{s}'_i)_i, (\kappa'_j)_j)}(Z_{n''-m+1, 2n''-m}) M^{\otimes(n''-m)} dX_{2, 2n''-m} dV_{2n''-m} \\ & \leq \sum_{\substack{(T_a^>, T_b^>) \\ (q, \bar{q}, c)}} \int M^{\otimes(n''-m)} dV_{2n''-m} \\ & \quad \times \int_{B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^1} d\hat{x}_1 \cdots \int_{B_{T^>, (q, \bar{q}, c)}^{n''-1}} d\hat{x}_{n''-1} \int_{B_{T_b^>}^{n''}} d\hat{x}_{n''} \cdots \int_{B_{T_b^>}^{2n''-m-1}} d\hat{x}_{2n''-m-1} \\ & \leq \left(\frac{C}{\mu_\varepsilon} \right)^{2n''-m-1} (2n'' - m)^{4n''-2m} \frac{\delta^{\max(n''-n', 1)} \theta^{(n'-n_k-1)_+} t^{n_k+m}}{\max(n'' - n', 1)! (n' - n_k - 1)_+! n_k! (n'' - m)!} \\ & \quad \times (\mathbb{V}t)^{2d+4} \varepsilon |\log \varepsilon| \\ & \leq C' \left(\frac{C'}{\mu_\varepsilon} \right)^{2n''-m-1} (2n'' - m)^{2n''-m-1} \delta^2 \theta^{(n''-n_k-2)_+} t^{n_k+m+2d+4} \varepsilon^\alpha \end{aligned}$$

where we use that for $(d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{N}^k$,

$$\frac{1}{d_1! \cdots d_k!} \leq \frac{k^{d_1 + \dots + d_k}}{(d_1 + \dots + d_k)!}$$

and the Stirling formula. Summing on the $(4\gamma)^{2(n''-1)}$ possible $((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)$ and $((s'_i, \bar{s}'_i)_i, (\kappa'_j)_j)$ and then dividing by $(n'')^2$, we obtain the expected result. \blacksquare

5.6 Estimation of pathological recollisions

In the present section we discuss $G_\varepsilon^{\text{rec}, 2}(t)$ defined by

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{1 \leq k \leq K-1 \\ 1 \leq k' \leq K'}} \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_k \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \left(\sum_{n' \geq n_k} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_{n'}} \Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h](\mathbf{Z}_{i_{n'}}(t_s + \delta)) \mathcal{X}_{i_{n'}}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\mathcal{R}_\varepsilon} \right] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{n'' \geq n' \geq n_k} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_{n''}} \Phi_{\underline{n}, n''}^{\gamma, \delta}[\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h]](\mathbf{Z}_{i_{n''}}(t_s)) \mathcal{X}_{i_{n''}}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\mathcal{R}_\varepsilon} \right] \right). \end{aligned}$$

We will prove the following bound:

Proposition 5.6.1

For $\varepsilon > 0$ small enough, we have

$$(5.6.1) \quad \left| G_\varepsilon^{rec,2}(t) \right| \leq C \|h\| \|g\| \left(K 2^{K^2} (Ct)^{2^{K+1}} \right) \varepsilon^{\alpha/2}.$$

5.6.1 Finite-parameter expansion

In the sums

$$\sum_{(i_1, \dots, i_{n'})} \Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h] (\mathbf{Z}_{i_{n'}}(t_s + \delta)) \mathcal{X}_{i_{n'}}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s))$$

and

$$\sum_{(i_1, \dots, i_{n''})} \Phi_{n' \leftarrow n''}^\gamma \left[\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h] \right] (\mathbf{Z}_{i_{n''}}(t_s)) \mathcal{X}_{i_{n'}}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)),$$

the indicator function $\mathcal{X}_{i_{n'}}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}})$ depends on all the particles of the system. In addition in the first sum we evaluate a function at time t_s and another function at time $t_s + \delta$. In order to apply usual L^2 estimates, we first decompose the terms into a sum of functions evaluated on finitely many parameters.

Decomposition of $\mathcal{X}_{(i_1, \dots, i_{n'})}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}})$

We begin by expanding $\mathcal{X}_{(i_1, \dots, i_{n'})}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}})$ as a sum of functions of a finite number of particles: we can decompose it formally as

$$(5.6.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{X}_{(i_1, \dots, i_n)}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}) &= 1 - \prod_{\substack{\omega \subset \{1, \dots, \mathcal{N}\} \\ \omega \cap \{i_1, \dots, i_n\} \neq \emptyset}} (1 - \chi(\mathbf{Z}_\omega)) \\ &= - \sum_{p \geq n} \sum_{(i_{n+1}, \dots, i_p)} \frac{1}{(p-n)!} \sum_{p \geq 0} \sum_{\bar{\omega} \in \mathcal{Q}_{[1, n], [n+1, p]}^p} \prod_{j=1}^p [-\chi(\mathbf{Z}_{i_{\bar{\omega}_j}})] \end{aligned}$$

where we define for ω_1 and ω_2 two subsets of \mathbb{N} with empty intersection

$$\mathcal{Q}_{\omega_1, \omega_2}^p := \left\{ (\varpi_1, \dots, \varpi_p) \mid \forall i, \varpi_i \subset \omega_1 \cup \omega_2, \varpi_i \cap \omega_1 \neq \emptyset; \omega_2 \subset \bigcup_{j=1}^p \varpi_j; \forall i \neq j, \varpi_i \neq \varpi_j \right\}.$$

Defining

$$(5.6.3) \quad \mathfrak{X}_{n,p}(\mathbf{Z}_{i_p}) := - \frac{1}{(p-n)!} \sum_{p \geq 0} \sum_{\bar{\omega} \in \mathcal{Q}_{[1, n], [n+1, p]}^p} \prod_{j=1}^p [-\chi(\mathbf{Z}_{i_{\bar{\omega}_j}})],$$

we have for any bounded and measurable function h_n

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n)} h_n(\mathbf{Z}_{i_n}(\tau_1)) \mathcal{X}_{i_n}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}) := \sum_{p \geq n} \sum_{(i_1, \dots, i_p)} h_n(\mathbf{Z}_{i_n}(\tau_1)) \mathfrak{X}_{n,p}(\mathbf{Z}_{i_p}(\tau_2)).$$

For any family $(\varpi_1, \dots, \varpi_p) \in \mathcal{Q}_{[1, n], [n+1, p]}^p$ has all its terms disjoint. Thus p is smaller than the $|\{\varpi, \varpi \subset \{1, \dots, p\}\}| = 2^p$ and $|\mathfrak{X}_{n,p}|$ is bounded by 2^{2^p} . This equality holds

on $\{\mathcal{N} \leq N\}$ for every $N \in \mathbb{N}$ and the number of particles is bounded on Υ_ε . Hence the decomposition is valid on Υ_ε .

Applying the decomposition to the formula for $G_\varepsilon^{\text{rec},2}(t)$ we obtain:

$$(5.6.4) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_{n''}} \Phi_{n' \leftarrow n''}^\gamma \left[\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'} [h] \right] (\mathbf{Z}_{i_{n''}}(t_s)) \mathcal{X}_{i_{n'}}(\mathbf{Z}_\mathcal{N}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \\ &= \sum_{p \geq n''} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_p} \Phi_{n' \leftarrow n''}^\gamma \left[\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'} [h] \right] (\mathbf{Z}_{i_{n''}}(t_s)) \mathfrak{X}_{n', p}(\mathbf{Z}_{i_{[1, n'] \cup [n''+1, p]}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

and

$$(5.6.5) \quad \begin{aligned} & \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_{n'}} \Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'} [h] (\mathbf{Z}_{i_{n'}}(t_s + \delta)) \mathcal{X}_{i_{n'}}(\mathbf{Z}_\mathcal{N}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \\ &= \sum_{p \geq 0} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_p} \Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'} [h] (\mathbf{Z}_{i_{n'}}(t_s + \delta)) \mathfrak{X}_{n', p}(\mathbf{Z}_{i_{[1, n']}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Dynamical cluster development

In the second member of $G_\varepsilon^{\text{rec},2}$ we look at functions at time t_s and $t_s - \delta$. To come back to one single evaluation time we have to do some pseudotrajectory development. But tree pseudotrajectories are not handable, precisely because of possible many local recollision. Thus, we will use a different kind of pseudotrajectory development, called here ‘‘dynamical cluster development’’ (see [Sin72], from which we take inspiration).

We denote by $\mathbf{Z}^\lambda(\tau) = (\mathbf{X}^\lambda(\tau), \mathbf{V}^\lambda(\tau))$ the trajectory of the particles λ in a realization of the hard sphere dynamics -isolated of the other particles- with initial data Z_λ . For any subset $\lambda' \subset \lambda$, $\mathbf{Z}_{\lambda'}^\lambda(\tau)$ is the trajectory of particles λ' in $\mathbf{Z}^\lambda(\tau)$.

We say that $\mathbf{Z}^\lambda(\tau)$ forms a ‘‘dynamical cluster’’ if the collision graph on the time interval $[0, \delta]$ is connected, and we denote $\varphi_{|\lambda|}(Z_\lambda)$ the indicator function that the trajectory $\mathbf{Z}^\lambda(\tau)$ forms a cluster. In the same way, for $\lambda' \subset \lambda$, $\mathbf{Z}^\lambda(\tau)$ form a λ' -cluster if in the collision of $\mathbf{Z}^\lambda(\tau)$, all the particles are in the same connected components than one of the particles of λ' . The function $\varphi_{|\lambda|}^{\lambda'}(Z_\lambda)$ is equal to 1 if $\mathbf{Z}^\lambda(\tau)$ is a λ' -cluster, 0 else.

We say that trajectories $\mathbf{Z}^\lambda(\tau)$ and $\mathbf{Z}^{\lambda'}(\tau)$ (with $\lambda \cap \lambda' = \emptyset$) have an overlap if there exist a couple of particle $(i, i') \in \lambda \times \lambda'$ and some time $\tau \in [0, \delta]$, such that $|\mathbf{x}_i^\lambda(\tau) - \mathbf{x}_{i'}^{\lambda'}(\tau)| \leq \varepsilon$. Then we denote $\lambda \overset{\circ}{\sim} \lambda'$.

For $(Z_{\lambda_1}, \dots, Z_{\lambda_l}) \in \prod_{i=1}^l \mathcal{D}_\varepsilon^{|\lambda_i|}$ initial data, we look at the indicator function that for any $i \neq j$, $\mathbf{Z}^{\lambda_i}(\tau)$ and $\mathbf{Z}^{\lambda_j}(\tau)$ have no overlap. As in section 5.3 we can expand the function:

$$(5.6.6) \quad \prod_{1 \leq i < j \leq l} (1 - \mathbb{1}_{\lambda_i \overset{\circ}{\sim} \lambda_j}) = \sum_{\substack{\omega \subset [1, l] \\ 1 \in \omega}} \sum_{C \in \mathcal{C}(\omega)} \underbrace{\prod_{(i, j) \in E(C)} -\mathbb{1}_{\lambda_i \overset{\circ}{\sim} \lambda_j}}_{:= \psi_{|\omega|}(Z_{\lambda_1}, Z_{\lambda_{\omega(2)}}, \dots, Z_{\lambda_{\omega(|\omega|)}})} \prod_{\substack{(i, j) \in (\omega^c)^2 \\ i \neq j}} (1 - \mathbb{1}_{\lambda_i \overset{\circ}{\sim} \lambda_j}).$$

We have defined $(\psi_l)_l$ the cumulants of the overlap indicator. We make a partition of \mathcal{D}_ε depending on the way particles interact on the the time interval $[0, \delta]$: fixing $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ and

\dot{i}_m ,

$$\begin{aligned} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(\delta)) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\substack{\dot{i}_m \subset \lambda_1 \\ (\lambda_2, \dots, \lambda_l) \in \mathcal{P}_{\lambda_1^c}^{l-1}}} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(\delta)) \varphi_{\lambda_1}^{\dot{i}_m}(\mathbf{Z}_{\lambda_1}) \prod_{i=2}^l \varphi_{|\lambda_i|}(\mathbf{Z}_{\lambda_i}) \prod_{1 \leq i < j \leq l} (1 - \mathbb{1}_{\lambda_i \circ \lambda_j}) \\ &= \sum_{l=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\substack{\dot{i}_m \subset \lambda_1 \\ (\lambda_2, \dots, \lambda_l) \in \mathcal{P}_{\lambda_1^c}^{l-1}}} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(\delta)) \varphi_{\lambda_1}^{\dot{i}_m}(\mathbf{Z}_{\lambda_1}) \prod_{i=2}^l \varphi_{|\lambda_i|}(\mathbf{Z}_{\lambda_i}) \sum_{\substack{\omega \subset [1, l] \\ 1 \in \omega}} \psi_{|\omega|}(\mathbf{Z}_{\underline{\lambda}_\omega}) \\ &\quad \times \prod_{\substack{(i, j) \in (\omega^c)^2 \\ i \neq j}} (1 - \mathbb{1}_{\lambda_i \circ \lambda_j}) \end{aligned}$$

where we have denoted \mathcal{P}_ω^r the set of the unordered partitions (ρ_1, \dots, ρ_r) of the set ω .

We make the change of variable

$$(\mathbf{l}, (\lambda_1, \dots, \lambda_l), \omega) \mapsto \left(\rho, \mathbf{l}_1, (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{l_1}), \mathbf{l}_2, (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{l_2}) \right)$$

where

$$\rho := \bigcup_{i \in \omega} \lambda_i, \quad \mathbf{l}_2 := |\omega|, \quad \mathbf{l}_1 := l - |\omega|,$$

$$(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{l_1}) := (\lambda_j)_{j \in \omega^c}, \quad (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{l_2}) := (\lambda_j)_{j \in \omega}.$$

The set ρ is the set of particles which interact (in the dynamics or *via* an overlap) in \dot{i}_m . Thus

$$\begin{aligned} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(\delta)) &= \sum_{\dot{i}_m \subset \rho} \sum_{l_1=1}^{|\rho|} \sum_{\substack{\dot{i}_m \subset \bar{\lambda}_1 \subset \rho \\ (\bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{l_1}) \in \mathcal{P}_{\bar{\lambda}_1^c}^{l_1-1}}} h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}^{\bar{\lambda}_1}(\delta)) \varphi_{\bar{\lambda}_1}^{\dot{i}_m}(\mathbf{Z}_{\bar{\lambda}_1}) \prod_{i=2}^{l_1} \varphi_{|\bar{\lambda}_i|}(\mathbf{Z}_{\bar{\lambda}_i}) \psi_{l_1}(\mathbf{Z}_{\bar{\lambda}_1}, \dots, \mathbf{Z}_{\bar{\lambda}_{l_1}}) \\ &\quad \times \sum_{l_2=1}^{|\rho^c|} \sum_{(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{l_2}) \in \mathcal{P}_{\rho^c}^{l_2}} \prod_{i=1}^{l_2} \varphi_{|\tilde{\lambda}_i|}(\mathbf{Z}_{\tilde{\lambda}_i}) \prod_{\substack{(i, j) \in (\omega^c)^2 \\ i \neq j}} (1 - \mathbb{1}_{\tilde{\lambda}_i \circ \tilde{\lambda}_j}). \end{aligned}$$

The second line is the sum over all possible partitions $(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{l_2})$ of ρ^c of the indicator function that they are effectively the dynamical cluster of the initial data. Hence it is equal to one. Thus defining the n -th *dynamical cumulant* as

$$(5.6.7) \quad \mathbf{f}_{m \leftarrow n}[h_m](Z_n) := \frac{1}{(n-m)!} \sum_{l=1}^n \sum_{\substack{\lambda_1 \subset [1, n] \\ [1, m] \subset \lambda_1}} \sum_{\substack{(\lambda_2, \dots, \lambda_l) \\ \in \mathcal{P}_{\lambda_1^c}^{l-1}}} h_m(\mathbf{Z}_{[1, m]}^{\lambda_1}(\delta)) \psi_l(Z_{\lambda_1}, \dots, Z_{\lambda_l}) \\ \quad \times \varphi_{|\lambda_1|}^{[1, m]}(Z_{\lambda_1}) \prod_{i=2}^l \varphi_{|\lambda_i|}(Z_{\lambda_i}),$$

we obtain the dynamical cluster expansion:

Theorem 5.6.2

For almost all $\mathbf{Z}_\mathcal{N} \in \mathcal{D}_\varepsilon$ we have

$$(5.6.8) \quad h_m(\mathbf{Z}_{\dot{i}_m}(\delta)) = \sum_{n \geq m} \sum_{(i_{m+1}, \dots, i_n)} \mathbf{f}_{m \leftarrow n}[h_m](\mathbf{Z}_{i_n}(0)).$$

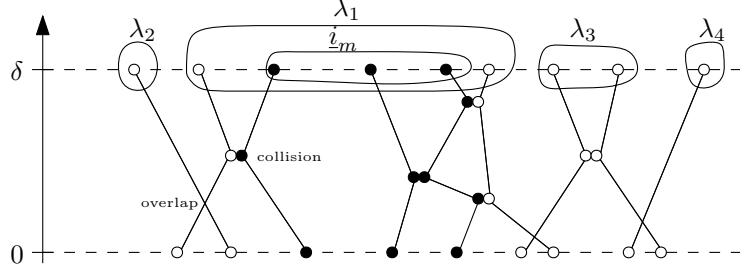


Figure 5.9 – Example of trajectory in a dynamical cumulant. We want to follow the black particles.

Applying this to (5.6.4):

$$(5.6.9) \quad \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{(i_1, \dots, i_{n'})} \Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h] (\mathbf{Z}_{i_{n'}}(t_s + \delta)) \mathfrak{X}_{i_{n'}}(\mathbf{Z}_{\mathcal{N}}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \\ = \sum_{l \geq p \geq n'} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{(i_1, \dots, i_l)} f_{p \leftarrow l} [\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h]] (\mathbf{Z}_{i_l}(t_s)) \mathfrak{X}_{n', p}(\mathbf{Z}_{i_p}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right]$$

where $f_{p \leftarrow l} [\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}]$ is the dynamical cumulant of $Z_p \mapsto \Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}(Z_{[1, n']})$.

Finally we symmetrize these two functions:

$$(5.6.10) \quad \Phi_{\underline{n}, n', p, l}^r(Z_l) := \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_l} f_{p \leftarrow l} [\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h]] (Z_{\sigma([1, l])}) \mathfrak{X}_{n', p}(Z_{\sigma([1, p])})$$

$$(5.6.11) \quad \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(Z_p) \\ := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \Phi_{n' \leftarrow n''}^\gamma [\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h]] (Z_{\sigma([1, n''])}) \mathfrak{X}_{n', p}(Z_{\sigma([1, n'] \cup [n''+1, p])}).$$

We have thus rewritten $G_\varepsilon^{\text{rec}, 2}(t)$ as a function evaluated on finitely many variables:

$$(5.6.12) \quad G_\varepsilon^{\text{rec}, 2}(t) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq K-1 \\ 1 \leq k' \leq K'}} \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_k \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \sum_{n' \geq 0} \left(\sum_{\substack{l \geq 0 \\ p \geq 0}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_l} \Phi_{\underline{n}, n', p, l}^{k'}(\mathbf{Z}_{i_l}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \right. \\ \left. - \sum_{\substack{n'' \geq 0 \\ p \geq 0}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_\varepsilon}} \sum_{i_p} \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(\mathbf{Z}_{i_p}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \right).$$

5.6.2 Geometrical estimation of local recollisions

The aim of this part is to prove the following bound on $\Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}$ and $\Phi_{\underline{n}, n', p, l}^{k'}$:

Proposition 5.6.3

Fix $n_1 \leq \dots \leq n_k \leq n' \leq n'' < p$. For $m \in \{1, \dots, p\}$ we have

$$(5.6.13) \quad \int_{x_1=0} \sup_{y \in \Lambda} |\Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(\tau_y Z_p)| M^{\otimes p} dX_{2, p} dV_p \leq \frac{\|h\|}{\mu_\varepsilon^{p-1}} C^p \delta^2 \varepsilon^\alpha \theta^{(p-n_k-2)_+} t^{n_k-1},$$

(5.6.14)

$$\int_{x_1=0} \sup_{y \in \Lambda} \left| \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(\tau_y Z_p) \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(\tau_y Z_{p+1-m, 2p-m}) \right| M^{\otimes(2p-m)} dX_{2, 2p-m} dV_{p-m} \\ \leq \frac{\|h\|^2}{p^m \mu_\varepsilon^{2p-m-1}} C^p \delta^2 \varepsilon^\alpha \theta^{(p-n_k-2)_+} t^{n_k-1+p-m}.$$

In the same way if we fix $n_1 \leq \dots \leq n_k \leq n' \leq n'' < p \leq l$, for $m \in \{1, \dots, l\}$ we have

$$(5.6.15) \quad \int_{x_1=0} \sup_{y \in \Lambda} \left| \Phi_{\underline{n}, n', p, l}^{k'}(\tau_y Z_l) \right| M^{\otimes l} dX_{l-1} dV_l \leq \frac{\|h\|}{\mu_\varepsilon^{l-1}} C^l \delta^2 \varepsilon^\alpha \theta^{(l-n_k-2)_+} t^{n_k-1},$$

$$(5.6.16) \quad \int_{x_1=0} \sup_{y \in \Lambda} \left| \Phi_{\underline{n}, n', p, l}^{k'}(\tau_y Z_p) \Phi_{\underline{n}, n', p, l}^{k'}(\tau_y Z_{l+1-m, 2l-m}) \right| M^{\otimes(2l-m)} dX_{2, 2l-m} dV_{2l-m} \\ \leq \frac{\|h\|^2}{l^m \mu_\varepsilon^{2l-m-1}} C^l \delta^2 \varepsilon^\alpha \theta^{(l-n_k-2)_+} t^{n_k-1+l-m}.$$

From this and using the quasi-orthogonality estimates we obtain:

$$(5.6.17) \quad \left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{i_p} \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(\mathbf{Z}_{i_p}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \right| \leq \|h\| \|g\| C^p \left(\delta^2 \varepsilon^\alpha \theta^{(p-n_k-2)_+} t^{n_k-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \left(p \delta^2 \varepsilon^\alpha \theta^{(p-n_k-2)_+} t^{n_k-1+p} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \leq \delta \varepsilon^{\alpha/2} \|h\| \|g\| C^p (\theta t)^{(p-n_k-2)_+/2} t^{n_k}$$

and in the same way

$$(5.6.18) \quad \left| \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{i_l} \Phi_{\underline{n}, n', p, l}^r(\mathbf{Z}_{i_l}(t_s)) \zeta_\varepsilon^0(g) \mathbb{1}_{\Upsilon_\varepsilon} \right] \right| \leq \delta \varepsilon^{\alpha/2} \|h\| \|g\| C^l (\theta t)^{(l-n_k-2)_+/2} t^{n_k}.$$

Because θ tends to 0 as ε goes to zero, for ε small enough, the two previous series are summable with respect to respectively (l, n'', n') and (l, p, n') . We recall that $K' = \theta/\delta$ and we sum on k, \underline{n} and r to obtain that there exists a positive constant C depending only on the dimension and γ such that

$$(5.6.19) \quad \left| G_\varepsilon^{\text{rec}, 2}(t) \right| \leq C \delta \varepsilon^{\alpha/2} \|h\| \|g\| \frac{\theta}{\delta} \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_k \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} (Ct)^{n_k} \leq C \varepsilon^{\alpha/2} \|h\| \|g\| \sum_{k=1}^K 2^{k^2} (Ct)^{2^{k+1}} \\ \leq C \|h\| \|g\| \left(K 2^{K^2} (Ct)^{2^{K+1}} \right) \varepsilon^{\alpha/2}$$

which concludes the proof of (5.6.1).

We have to prove four slightly different versions of the same inequality. We will do so in detail only for the first one, then we will explain how to adapt the others.

Proof of (5.6.13) : We recall that

$$\Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(Z_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \Phi_{n' \leftarrow n''}^\gamma \left[\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h] \right] (Z_{\sigma([1, n''])}) \mathfrak{X}_{n', p}(Z_{\sigma([1, n'] \cup [n''+1, p])}).$$

In $\Phi_{n' \leftarrow n''}^\gamma \left[\Phi_{\underline{n}, n'}^{k'}[h] \right] (Z_{n''}) \mathfrak{X}_{n', p}(Z_{[1, n'] \cup [n''+1, p]})$ we see three sets of indices:

- $[1, n']$ the set of particles in "final" tree pseudotrajectories development,
- $[n' + 1, n'']$ the particles added in the local tree development,
- $[n'' + 1, p]$ the particles which produce local recollisions.

Any permutation σ which sends $[1, n']$, $[n' + 1, n'']$ and $[n'' + 1, p]$ onto themselves stabilizes $\Phi_{n' \leftarrow n''}^\gamma \left[\Phi_{\underline{n}, n'}^{k'} [h] \right] (Z_{n''}) \mathfrak{X}_{n', p}(Z_{[1, n'] \cup [n'' + 1, p]})$ and

$$\begin{aligned} & \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^r(Z_p) \\ &= \frac{n'! (n'' - n')! (p - n'')!}{p!} \sum_{\substack{\underline{\omega} \in \mathcal{P}_p^3 \\ |\omega_1| = n' \\ |\omega_2| = p - n''}} \Phi_{n' \leftarrow n''}^\gamma \left[\Phi_{\underline{n}, n'}^{k'} \right] (Z_{\omega_1}, Z_{\omega_3}) \mathfrak{X}_{n', p}(Z_{\omega_1}, Z_{\omega_2}). \end{aligned}$$

Let us develop $\Phi_{n' \leftarrow n''}^\gamma \left[\Phi_{\underline{n}, n'}^{k'} [h] \right]$ and $\mathfrak{X}_{n', p}$. For $((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))$ a set of recollision parameters, we denote $\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))} \subset \mathcal{D}_\varepsilon^{n''}$ the set of initial data such that there is

- n' particles at time δ ,
- n_k particles at time $(k' + 1)\delta$ and
- n_j particles at time $(k' + 1)\delta + (k - j)\theta$.

Then

$$(5.6.20) \quad \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^r(Z_p) = \frac{1}{p!} \sum_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))} \sum_{\substack{\omega_1 \sqcup \omega_2 \sqcup \omega_3 = [p] \\ |\omega_1| = n' \\ |\omega_2| = p - n''}} \sum_{\mathbf{p} \geq 1} \sum_{\underline{\omega} \in \mathcal{Q}_{\omega_1, \omega_2}^{\mathbf{p}}} -\mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))}}(Z_{\omega_1 \cup \omega_3}) \\ \times h(Z_{\omega_1 \cup \omega_3}(t - t_s)) \prod_{i=1}^{n''-1} \bar{s}_i \prod_{i=1}^{\mathbf{p}} (-\chi(Z_{\varpi_i}))$$

where

$$Z_{\omega_1 \cup \omega_3}(t - t_s) := Z(t - t_s, ((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j)), Z_{\omega_1 \cup \omega_3})$$

and we have

$$(5.6.21) \quad \left| \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'} \right| (Z_p) \leq \frac{\|h\|}{p!} \sum_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))} \sum_{\substack{\omega_1 \sqcup \omega_2 \sqcup \omega_3 = [p] \\ |\omega_1| = n' \\ |\omega_2| = p - n''}} \sum_{\mathbf{p} \geq 1} \sum_{\underline{\omega} \in \mathcal{Q}_{\omega_1, \omega_2}^{\mathbf{p}}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))}}(Z_{\omega_1 \cup \omega_3}) \\ \times \prod_{i=1}^{\mathbf{p}} \chi(Z_{\varpi_i}).$$

Note that the right hand side is invariant under translation. Thus one can fix $x_1 = 0$ and integrate with respect to the other variables.

The set of parameters $\mathcal{Q}_{\omega_1, \omega_2}^{\mathbf{p}}$ is huge and we need now the global conditioning in order to control the number of acceptable $\underline{\omega}$.

Given Z_l , we introduce $\underline{\rho} := (\rho_1, \dots, \rho_r)$ the $\delta\mathbb{V}$ -distance partition: consider the graph G with vertices $[1, p]$ with $(i, j) \in E(G)$ if and only if $|x_i - x_j| \leq \gamma\delta\mathbb{V}$. The ρ_i are the connected components of G . We define $\mathcal{D}_\varepsilon^\rho \subset \mathcal{D}_\varepsilon^p$ as the set such that $\underline{\rho}$ is the distance partition, and the $(\mathcal{D}_\varepsilon^\rho)_{\underline{\rho}}$ form a partition of $\mathcal{D}_\varepsilon^p$.

Inside each cluster ρ_i , particles can only interact with the other particles as the kinetic energy $|V_{\rho_i}(\tau)|^2$ is bounded by \mathbb{V}^2 . Hence the system ρ^i is isolated on $[0, \delta]$ and for any $\varpi \subset \omega_1 \cup \omega_3$, if particles in Z_ω can have a pseudotrajectory with connected collision graph (and a local recollision), then there exists some ρ_i containing ω .

We can perform now the following parametrisation: for any ρ_i , we consider

- $\underline{\omega}^i := (\omega_1^i, \omega_2^i, \omega_3^i)$ the partition of ρ_i defined by $\omega_j^i := \omega_j \cap \rho_i$,
- $\underline{\varpi}^i := \{\varpi_j \text{ such that } \varpi_j \subset \rho_i\}$,

— $\mathbf{p}_i := (\underline{\omega}^i, \overline{\omega}^i)$, and $\mathfrak{P}(\rho_i)$ the set of possible \mathbf{p}_i .

Because ρ_i is of size at most γ , there exists a constant C_γ depending only on γ such that $|\mathfrak{P}(\rho_i)| \leq C_\gamma$. Any particle in ω_2 or ω_3 has to be close to a particle in ω_1 because they are in some pseudotrajectory on $[0, \delta]$ involving a particle in ω_1 . So for any ρ_i , ω_1^i is not empty. Finally note that if we fix $\underline{\rho}$, the map $(\underline{\omega}, \overline{\omega}) \mapsto (\mathbf{p}_i)_i$ is onto.

We have now the following bound

$$|\Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^r(Z_p)| \leq \frac{\|h\|}{p!} \sum_{r=1}^p \sum_{\underline{\rho} \in \mathcal{P}_p^r} \sum_{\substack{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j)) \\ \mathbf{p} \in \prod_i \mathfrak{P}(\rho_i)}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))}^{\underline{\rho}, \mathbf{p}}}(Z_p) \prod_{i=1}^r \Delta_{\mathbf{p}_i}(Z_{\rho_i})$$

where the function

$$\Delta_{\mathbf{p}_i}(Z_{\rho_i}) := \mathbb{1}_{Z_{\rho_i} \text{ form a distance cluster}} \prod_{j=1}^{|\overline{\omega}^i|} \chi(Z_{\omega_j^i})$$

controls the local cluster and

$$\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))}^{\underline{\rho}, \mathbf{p}} := \left\{ Z_p \in \mathcal{D}_\varepsilon^\rho, Z_{\omega_1 \cup \omega_3} \in \mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))} \right\}.$$

We use the same method than in [BGRS20a] to control the first condition.

For a pseudotrajectory $Z_{\omega_1 \cup \omega_3}(\tau)$, consider its collision graph $\mathcal{G}_{\omega_1 \cup \omega_3}^{[0, t-t_s]}$. Then, we can construct the graph G by identifying in $\mathcal{G}_{\omega_1 \cup \omega_3}^{[0, t-t_s]}$ the particles in a same cluster ρ_i . Finally we can construct the *clustering trees* $T^> := (\nu_i, \bar{\nu}_i)_{1 \leq i \leq r-1}$ where the i -th clustering collision in G happens between cluster ρ_{ν_i} and $\rho_{\bar{\nu}_i}$.

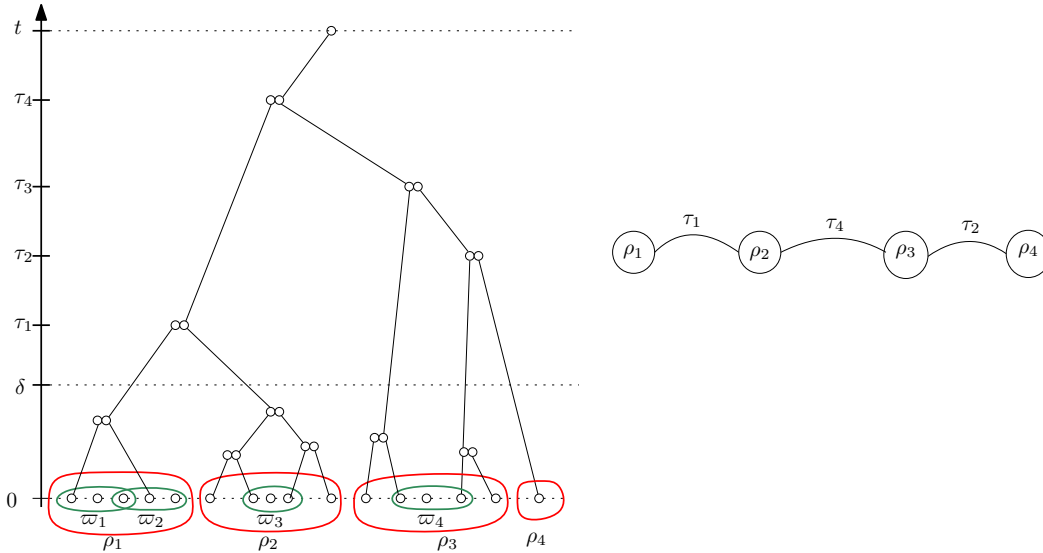


Figure 5.10 – Example of construction of the clustering sets.

We need to count the number of clustering collisions of $T^>$ happening between time δ and time θ . If $r > n_k$, all the $r - 1$ collisions in $T^>$ cannot correspond to the $n_k - 1$ annihilations of the time interval $[(k' + 1)\delta, t - t_s]$. Thus at least $(r - n_k)_+$ collision happen in $[\delta, (k' + 1)\delta] \subset [0, 2\theta]$.

We construct now a different representation of collision graphs. Let L_0 be equal to $\{\{1\}, \dots, \{r\}\}$ and construct the L_i and $(\nu_{(i)}, \bar{\nu}_{(i)})$ sequentially. Suppose that $L_{i-1} = (c_1, \dots, c_l)$, the (c_j) forming a partition of $[1, r]$. The i -th collision happens between cluster $\nu_i \in c_a$ and $\bar{\nu}_i \in c_b$. Then:

- $L_i := (L_{i-1} \setminus \{c_a, c_b\}) \cup \{c_a \cup c_b\}$,
 - $\{\nu_{(i)}, \bar{\nu}_{(i)}\} := \{c_a, c_b\}$ with $\max \nu_{(i)} < \max \bar{\nu}_{(i)}$.
- The $(\nu_{(i)}, \bar{\nu}_{(i)})$ define a partition of $\mathcal{T}_{\mathbf{r}}^>$ (the set of ordered trees on $[1, \mathbf{r}]$).

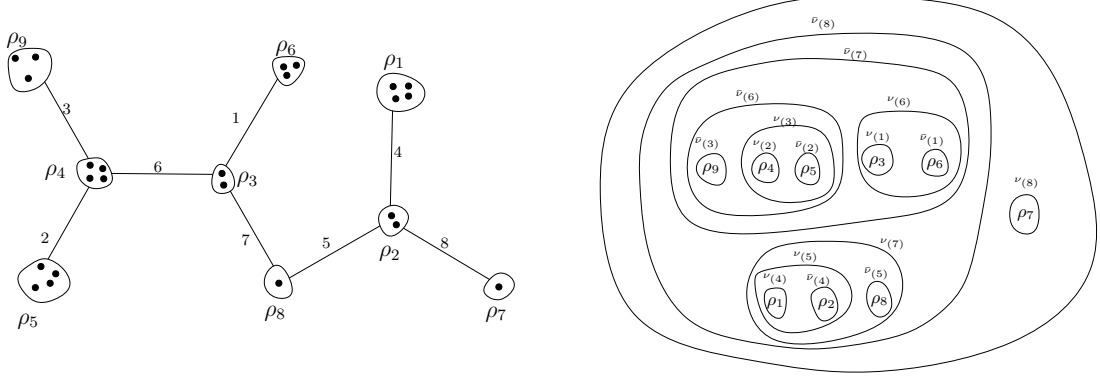


Figure 5.11 – An example of construction of the representation $(\nu_{(i)}, \bar{\nu}_{(i)})_i$ from a clustering graph.

We apply then the following change of variables:

$$\forall i \in \{1, \dots, \mathbf{r} - 1\}, \hat{x}_i := x_{\min \nu_{(i)}} - x_{\min \bar{\nu}_{(i)}}, \tilde{X}_i := (x_j - x_{\min \rho_i})_{j \in \rho_i},$$

$$X_{2,l} \mapsto (\hat{x}_1 \cdots, \hat{x}_{\mathbf{r}-1}, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\mathbf{r}}).$$

We begin by integrating the condition $\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))}$ with respect to $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{\mathbf{r}-1})$ with the relative positions inside a cluster \tilde{X}_i kept constant. The $(\Delta_{\mathbf{p}_i})_i$ will be integrated with respect to $(\tilde{X}_i)_i$ later.

Fix t_{i+1} the time of the $(i+1)$ -th clustering collision and the relative positions $\hat{x}_{i-1}, \dots, \hat{x}_1$. We define the i -th clustering set

$$B_i := \bigcup_{\substack{q \in \bigcup_{j \in \nu_{(i)}} \rho_j \\ \bar{q} \in \bigcup_{j \in \bar{\nu}_{(i)}} \rho_{\bar{j}}}} B_i^{q, \bar{q}}$$

with

$$B_i^{q, \bar{q}} := \left\{ \hat{x}_i \mid \exists t_i \in [0, t_{i+1} \wedge T_i], |x_{\bar{q}}(t_i) - x_{\bar{q}}(t_i)| = \varepsilon \right\}$$

and $T_i := 2\theta$ for the the $(\mathbf{r} - n_k)_+$ first collisions, t else.

Up to time t_i the curve \mathbf{x}_q and $\mathbf{x}_{\bar{q}}$ are independent. Hence we can perform the change of variable $\hat{x}_i \mapsto (t_i, \eta_i)$ with t_i the minimal collision time and

$$\eta_i = \frac{\mathbf{x}_{\bar{q}}(t_i) - \mathbf{x}_{\bar{q}}(t_i)}{|\mathbf{x}_{\bar{q}}(t_i) - \mathbf{x}_{\bar{q}}(t_i)|}.$$

The Jacobian of this diffeomorphism is $\mu_{\varepsilon}^{-1} (v_{\bar{q}}(t_i) - v_{\bar{q}}(t_i)) \cdot \eta_i |dt_i d\eta_i$. We integrate and we apply Cauchy-Schwarz inequality, using that the kinetic energy associated with cluster $\rho_{\nu_{(i)}}$ is non-increasing (we can only remove particles) up to time t_i .

Note that

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{q \in \nu_{(i)} \\ \bar{q} \in \bar{\nu}_{(i)}}} |v_{\bar{q}}(t_i) - v_{\bar{q}}(t_i)| &\leq |V_{\rho_{\nu_{(i)}}}(t_i)| |\rho_{\nu_{(i)}}|^{1/2} |\rho_{\bar{\nu}_{(i)}}| + |V_{\rho_{\bar{\nu}_{(i)}}}(t_i)| |\rho_{\bar{\nu}_{(i)}}|^{1/2} |\rho_{\nu_{(i)}}| \\ &\leq \left(|\rho_{\nu_{(i)}}| + |V_{\rho_{\nu_{(i)}}}|^2 \right) \left(|\rho_{\bar{\nu}_{(i)}}| + |V_{\rho_{\bar{\nu}_{(i)}}}|^2 \right) \\ &\leq \sum_{\substack{\nu_i \in \nu_{(i)} \\ \bar{\nu}_i \in \bar{\nu}_{(i)}}} \left(|\rho_{\nu_i}| + |V_{\rho_{\nu_i}}|^2 \right) \left(|\rho_{\bar{\nu}_i}| + |V_{\rho_{\bar{\nu}_i}}|^2 \right). \end{aligned}$$

This gives the following bound on $|B_i|$

$$\begin{aligned} |B_i| &\leq \frac{C}{\mu_\varepsilon} \int_0^{t_{i+1} \wedge T_i} dt_i \sum_{q, \bar{q}} |\mathbf{v}_{\bar{q}}(t_i) - \mathbf{v}_q(t_i)| \\ &\leq \frac{C}{\mu_\varepsilon} \sum_{\substack{\nu_i \in \nu^{(i)} \\ \bar{\nu}_i \in \bar{\nu}^{(i)}}} \left(|\rho_{\nu_i}| + |V_{\rho_{\nu_i}}|^2 \right) \left(|\rho_{\bar{\nu}_i}| + |V_{\rho_{\bar{\nu}_i}}|^2 \right) \int_0^{t_{i+1} \wedge T_i} dt_i. \end{aligned}$$

Permuting the product and the sum,

$$\begin{aligned} \sum_{(\nu^{(i)}, \bar{\nu}^{(i)})} \prod_{i=1}^{r-1} \left(|\rho_{\nu^{(i)}}| + |V_{\rho_{\nu^{(i)}}}|^2 \right) \left(|\rho_{\bar{\nu}^{(i)}}| + |V_{\rho_{\bar{\nu}^{(i)}}}|^2 \right) \\ = \sum_{(\nu^{(i)}, \bar{\nu}^{(i)})} \prod_{i=1}^{r-1} \sum_{\substack{\nu_i \in \nu^{(i)} \\ \bar{\nu}_i \in \bar{\nu}^{(i)}}} \left(|\rho_{\nu_i}| + |V_{\rho_{\nu_i}}|^2 \right) \left(|\rho_{\bar{\nu}_i}| + |V_{\rho_{\bar{\nu}_i}}|^2 \right) \\ = \sum_{(\nu_i, \bar{\nu}_i)} \prod_{i=1}^{r-1} \left(|\rho_{\nu_i}| + |V_{\rho_{\nu_i}}|^2 \right) \left(|\rho_{\bar{\nu}_i}| + |V_{\rho_{\bar{\nu}_i}}|^2 \right). \end{aligned}$$

Using that

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \frac{(a+b)!}{a!b!} \leq 2^{a+b},$$

we have

$$\int_0^t dt_{r-1} \cdots \int_0^{t_2 \wedge T_2} dt_1 \leq \frac{t^{n_k \wedge r-1}}{(n_k \wedge r-1)!} \frac{\theta^{(r-n_k)_+}}{((r-n_k)_+)!} \leq 2^{r-1} \frac{t^{n_k \wedge r-1} \theta^{(r-n_k)_+}}{(r-1)!}.$$

We can sum now on the clustering collisions:

$$\begin{aligned} \int \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))}} d\hat{x}_1 \cdots d\hat{x}_{r-1} &\leq \sum_{(\nu^{(i)}, \bar{\nu}^{(i)})} \int d\hat{x}'_1 \mathbb{1}_{B_1} \int d\hat{x}'_2 \cdots \int d\hat{x}_{r-1} \mathbb{1}_{B_{r-1}} \\ &\leq \left(\frac{C}{\mu_\varepsilon} \right)^{r-1} \int_0^t dt_{r-1} \cdots \int_0^{t_2 \wedge T_2} dt_1 \sum_{(\nu^{(i)}, \bar{\nu}^{(i)})} \prod_{i=1}^{r-1} \left(|\rho_{\nu^{(i)}}| + |V_{\rho_{\nu^{(i)}}}|^2 \right) \left(|\rho_{\bar{\nu}^{(i)}}| + |V_{\rho_{\bar{\nu}^{(i)}}}|^2 \right) \\ &\leq \left(\frac{2C}{\mu_\varepsilon} \right)^{r-1} \frac{t^{n_k \wedge r-1} \theta^{(r-n_k)_+}}{(r-1)!} \sum_{(\nu_i, \bar{\nu}_i)} \prod_{i=1}^{r-1} \left(|\rho_{\nu_i}| + |V_{\rho_{\nu_i}}|^2 \right) \left(|\rho_{\bar{\nu}_i}| + |V_{\rho_{\bar{\nu}_i}}|^2 \right). \end{aligned}$$

Then denoting $d_i(G)$ the degree of vertices in a graph, \mathcal{T}_r the set of minimally (not oriented) connected graphs on $[1, r]$,

$$\begin{aligned} \int \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))}} d\hat{x}_1 \cdots d\hat{x}_{r-1} &\leq \left(\frac{2C}{\mu_\varepsilon} \right)^{r-1} \frac{t^{n_k \wedge r-1} \theta^{(r-n_k)_+}}{(r-1)!} \sum_{T > \in \mathcal{T}_r^>} \prod_{i=1}^r \left(|\rho_i| + |V_{\rho_i}|^2 \right)^{d_i(T^>)} \\ &\leq \left(\frac{2C}{\mu_\varepsilon} \right)^{r-1} \frac{t^{n_k \wedge r-1} \theta^{(r-n_k)_+}}{(r-1)!} \sum_{T \in \mathcal{T}_r} \prod_{i=1}^r \left(|\rho_i| + |V_{\rho_i}|^2 \right)^{d_i(T)}. \end{aligned}$$

For $A, B > 0$, $x \in \mathbb{R}$, there exists a constant $C > 0$ such that

$$(A + x^2)^B e^{-\frac{x^2}{4}} \leq \left(\frac{4B}{e} \right)^B e^{\frac{A}{4}}.$$

We use this inequality to bound

$$\begin{aligned}
(5.6.22) \quad & \int \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))}^{\rho, p}} e^{-\frac{1}{4}|V_p|^2} d\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_{r-1} \\
& \leq \left(\frac{C}{\mu_\varepsilon} \right)^{r-1} t^{n_k \wedge r-1} \theta^{(r-n_k)_+} \sum_{T \in \mathcal{T}_r} \prod_{i=1}^r \left(|\rho_i| + |V_{\rho_i}|^2 \right)^{d_i(T)} e^{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^r |V_{\rho_i}|^2} \\
& \leq \tilde{C}^l \frac{t^{n_k \wedge r-1} \theta^{(r-n_k)_+}}{\mu_\varepsilon^{r-1}} \sum_{T \in \mathcal{T}_r} \prod_{i=1}^r d_i(T)^{d_i(T)}.
\end{aligned}$$

Next we use that for fixed (d_1, \dots, d_r) such that $\sum_i d_i = 2(n-1)$,

$$(5.6.23) \quad |\{T \in \mathcal{T}_r \mid \forall i \leq r, d_i(T) = T\}| = \frac{(r-2)!}{(d_1-1)! \cdots (d_r-1)!}$$

(see section 2 of [BGSRS20a]), which leads to

$$\begin{aligned}
(5.6.24) \quad & \sum_{T \in \mathcal{T}_r} \prod_{i=1}^r d_i(T)^{d_i(T)} = (r-2)! \sum_{\substack{d_1, \dots, d_r \\ r-1 \geq d_i \geq 1 \\ \sum_i d_i = 2(r-1)}} \prod_{i=1}^r \frac{d_i^{d_i}}{(d_i-1)!} \\
& \leq (r-2)! C^r \sum_{\substack{d_1, \dots, d_{r-1} \\ r-1 \geq d_i \geq 1 \\ r-1 \leq \sum_i d_i \leq 2r-3}} 1 \\
& \leq C^r (r-2)! \frac{(2r-3)^{r-1}}{(r-1)!} \leq \tilde{C}^l (r-1)!.
\end{aligned}$$

We can integrate now the condition $\Delta_{\mathbf{p}_i}(Z_{\rho_i})$. The particles in Z_{ρ_i} have to form a distance cluster. Thus every particle is in a ball of radius $|\rho_i| \delta \mathbb{V}$ in $\Lambda^{|\rho_i|-1}$ and because clusters are of size at most γ ,

$$\int_{\Lambda^{|\rho_i|-1} \times (\mathbb{R}^d)^{|\rho_i|}} \Delta_{\mathbf{p}_i}(Z_{\rho_i}) \frac{e^{-\frac{1}{4}|V_{\rho_i}|^2}}{(2\pi)^{d|\rho_i|/2}} d\tilde{X}_i dV_{\rho_i} \leq C_\gamma \mu_\varepsilon^{-|\rho_i|+1} \left(\delta^d \mathbb{V}^d \mu_\varepsilon \right)^{|\rho_i|-1}.$$

In addition, for at least one ρ_i , the set $\underline{\omega}^i$ is not empty. So we can apply estimate (5.2.6) and combining the two estimates

$$\begin{aligned}
& \int \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))}^{\rho, p}} (Z_{l_p}) \prod_{i=1}^r \Delta_{\mathbf{p}_i}(Z_{\rho_i}) M^{\otimes p}(V_p) dX_{2,p} dV_p \\
& \leq (r-1)! \tilde{C}^p \frac{t^{n_k \wedge r-1} \theta^{(r-n_k)_+}}{\mu_\varepsilon^{r-1}} \prod_{i=1}^r \left(\int \Delta_{\mathbf{p}_i}(Z_{\rho_i}) \frac{e^{-\frac{1}{4}|V_{\rho_i}|^2}}{(2\pi)^{d|\rho_i|/2}} d\tilde{X}_i dV_{\rho_i} \right) \\
& \leq (r-1)! C^p \frac{t^{n_k \wedge r-1} \theta^{(r-n_k)_+}}{\mu_\varepsilon^{r-1}} \left(\frac{\delta^d \mathbb{V}^d \mu_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} \right)^{(\sum_{i=1}^r |\rho_i|-1)-2} \left(\frac{\delta}{\mu_\varepsilon} \right)^2 \varepsilon^\alpha.
\end{aligned}$$

Every particle annihilated in the time interval $[0, \delta]$ has a clustering collision in this interval and thus is in a distance interval. Therefore $\sum_{i=1}^r (|\rho_i| - 1)$ is bigger than $p - n'$. In addition we have chosen θ bigger than $\delta^d \mathbb{V}^d \mu_\varepsilon$ (which is a power of ε) and

$$\int \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))}^{\rho, p}} (Z_p) \prod_{i=1}^r \Delta_{\mathbf{p}_i}(Z_{\rho_i}) M^{\otimes p} dX_{2,p} dV_p \leq (r-1)! \frac{C^p}{\mu_\varepsilon^{p-1}} t^{n_k-1} \theta^{(p-n_k-2)_+} \delta^2 \varepsilon^\alpha.$$

We sum now on the parameters $((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))$ and (\mathbf{p}_i) . Because size of $\delta\mathbb{V}$ -distance clusters are bounded by γ , the $|\mathfrak{P}(\rho_i)|$ are smaller than some $C_\gamma > 0$ depending only on γ . The conditioning bounds also the number of collision parameters $((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))$ by $(4\gamma)^{n''}$. Thus

$$\int |\Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^r(Z_p)| M^{\otimes p} dX_{2,p} dV_p \leq \frac{\|h\| (CC_\gamma 4\gamma)^p}{p! \mu_\varepsilon^{p-1}} t^{n_k-1} \theta^{(p-n_k-2)+} \delta^2 \varepsilon^\alpha \sum_{r=1}^p \sum_{\underline{\rho} \in \mathcal{P}_p^r} (r-1)!$$

$$\frac{1}{p!} \sum_{r=1}^p \sum_{\underline{\rho} \in \mathcal{P}_p^r} (r-1)! = \frac{1}{p!} \sum_{r=1}^p \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=p \\ k_i \geq 1}} \frac{p!}{k_1! \dots k_r!} \frac{(r-1)!}{r!} \leq \sum_{r=1}^p \sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=p \\ k_i \geq 1}} \frac{1}{k_1! \dots k_r!} \leq e^p$$

hence

$$\int |\Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^r(Z_p)| M^{\otimes p} dX_{2,p} dV_p \leq \frac{\|h\| p (e\tilde{C})^p}{\mu_\varepsilon^{p-1}} t^{k-1} \theta^{(p-n_k-2)+} \delta^2 \varepsilon^\alpha.$$

This ends the proof of the first inequality. \blacksquare

Proof of (5.6.14). :

We begin applying (5.6.21) to bound $|\Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^r(Z_p) \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^r(Z_m, Z_{p+1, 2p-m})|$:

$$(5.6.25) \quad \begin{aligned} & |\Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(Z_p) \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(Z_{p+1-m, 2p-m})| \\ & \leq \frac{\|h\|^2}{(p!)^2} \sum_{\substack{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j)) \\ ((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))}} \sum_{\substack{\omega_1 \sqcup \omega_2 \sqcup \omega_3 = [p] \\ \omega'_1 \sqcup \omega'_2 \sqcup \omega'_3 = [p+1-m, 2p-m] \\ |\omega_1| = |\omega'_1| = n' \\ |\omega_2| = |\omega'_2| = p-n''}} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}' \geq 1} \sum_{\substack{\underline{\omega} \in \mathcal{Q}_{\omega_1, \omega_2}^{\mathbf{p}} \\ \underline{\omega}' \in \mathcal{Q}_{\omega'_1, \omega'_2}^{\mathbf{p}'}}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j))}}(Z_{\omega_1 \cup \omega_3}) \\ & \quad \times \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_j))}}(Z_{\omega'_1 \cup \omega'_3}) \prod_{i=1}^{\mathbf{p}} \chi(Z_{\underline{\omega}_i}) \prod_{i=1}^{\mathbf{p}'} \chi(Z_{\underline{\omega}'_i}). \end{aligned}$$

Note that the right hand side is invariant under translation. Thus one can fix $x_1 = 0$ and integrate with respect to the other variables.

For a position Z_{2p-m} , we consider $\underline{\rho} := (\rho_1, \dots, \rho_r)$ the $\delta\mathbb{V}$ -cluster. We can then construct the parameters $\mathbf{p}_i := (\underline{\omega}^i, \underline{\omega}'^i, \underline{\omega}^i, \underline{\omega}'^i)$:

- $\underline{\omega}^i := (\omega_1^i, \omega_2^i, \omega_3^i)$ is a partition of $\rho_i \cap [1, p]$ defined by $\underline{\omega}_j^i := \omega_j \cap \rho_i$,
- $\underline{\omega}'^i := (\omega_1^i, \omega_2^i, \omega_3^i)$ is a partition of $\rho_i \cap [p+1-m, 2p+m]$ defined by $\underline{\omega}'_j := \omega_j \cap \rho_i$,
- $\underline{\omega}^i := \{\omega_j \text{ such that } \omega_j \subset \rho_i\}$ and
- $\underline{\omega}'^i := \{\omega'_j \text{ such that } \omega'_j \subset \rho_i\}$.

We denote now $\mathfrak{P}(\rho_i)$ the new set of possible parameters \mathbf{p}_i (this will not create a conflict with the previous section). Because each cluster ρ_i is of size at most γ , $|\mathfrak{P}(\rho_i)|$ is bounded by some constant C_γ depending only on γ . We define

$$\Delta_{\mathbf{p}_i}(Z_{\rho_i}) := \mathbb{1}_{Z_{\rho_i} \text{ form a distance cluster}} \prod_{j=1}^{|\underline{\omega}^i|} \chi(Z_{\underline{\omega}_j^i}) \prod_{j=1}^{|\underline{\omega}'^i|} \chi(Z_{\underline{\omega}'_j^i}) \text{ and}$$

$$\mathcal{R}_{\substack{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i)) \\ ((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_i))}}^{\underline{\rho}, \mathbf{p}} := \left\{ Z_{2p-m} \in \mathcal{D}_\varepsilon^\underline{\rho}, Z_{\omega_1 \cup \omega_3} \in \mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i))}, Z_{\omega'_1 \cup \omega'_3} \in \mathcal{R}_{((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_i))} \right\}$$

and we have as in the previous case

$$\begin{aligned} & \left| \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(Z_p) \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(Z_m, Z_{p+1, 2p-m}) \right| \\ & \leq \frac{\|h\|^2}{(p!)^2} \sum_{r=1}^{2p-m} \sum_{\underline{\rho} \in \mathcal{P}_p^r} \sum_{\substack{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_j)) \\ ((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_j)) \\ \underline{p} \in \prod_i \mathfrak{B}(\rho_i)}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i)) \\ ((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_i))}^{\underline{\rho}, \underline{p}}}}(Z_{2p-m}) \prod_{i=1}^r \Delta_{\rho_i}(Z_{\rho_i}). \end{aligned}$$

Note that, for at least one i , $\underline{\omega}^i$ is not empty. We construct now a clustering tree in order to estimate $\mathcal{R}_{((s_i, \bar{s}_i), (\kappa_i)) \\ ((s'_i, \bar{s}'_i), (\kappa'_i))}^{\underline{\rho}, \underline{p}}$.

Consider the collision graph associated with the first pseudotrajectory $\mathcal{G}_{\omega_1 \cup \omega_3}^{[0, t-t_s]}$ and the graph associated with second one $\mathcal{G}_{\omega'_1 \cup \omega'_3}^{[0, t-t_s]}$. Merge them and identify vertices in a same cluster ρ_i . Keeping only the first clustering collisions, we obtain the oriented tree $T^> := (\nu_i, \bar{\nu}_i)_{1 \leq i \leq r-1}$. Note that these clustering collisions can happen in the first or in the second pseudotrajectory.

As in the proof of (5.6.13) we have to bound the number of collisions of $T^>$ in the time interval $[0, 2\tau]$. There are at most $(n_k - 1 + p - m)$ collision in $[(k' + 1)\delta, t - t_s]$ ($n_k - 1$ for the first pseudotrajectory and we have to connect $p - m$ particles in the second). Thus there are at least $(r - (n_k - 1 + p - m))_+$ clustering collisions in $[\delta, (k' + 1)\delta] \subset [0, 2\tau]$.

We explain quickly how to estimate the i -th collision. As in the previous paragraph, we construct the modified tree parameters $(\nu_{(i)}, \bar{\nu}_{(i)})$ and the change of variable

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, r-1\}, \hat{x}_i &:= x_{\min \nu_{(i)}} - x_{\min \bar{\nu}_{(i)}}, \tilde{X}_i := (x_j - x_{\min \rho_i})_{j \in \rho_i}, \\ X_{2,l} &\mapsto (\hat{x}_1 \cdots, \hat{x}_{r-1}, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r), \end{aligned}$$

and we integrate on the (\hat{x}_i) .

The clustering set B_i is defined as follows: fix t_{i+1} the time of the $(i+1)$ -th clustering collision and the relative positions $\hat{x}_{i-1}, \dots, \hat{x}_1$. We define the i -th clustering set

$$B_i := \bigcup_{\substack{q \in \bigcup_{j \in \nu_{(i)}} \rho_j \\ \bar{q} \in \bigcup_{j \in \bar{\nu}_{(i)}} \rho_j}} \left(B_i^{q, \bar{q}} \cup B_i^{q', \bar{q}'} \right)$$

with

$$B_i^{q, \bar{q}} := \left\{ \hat{x}_i \mid \exists t_i \in [0, t_{i+1} \wedge T_i], |x_{\bar{q}}(t_i) - x_q(t_i)| = \varepsilon \right\},$$

where $x_i(\tau)$ is the pseudotrajectory with respect to parameters $((s_i, \bar{s}_i)_i, (\kappa_j)_j)$ and $T_i := 2\theta$ for the the $(r - n_k)_+$ first collisions, t else, and $B_i^{q', \bar{q}'}$ is defined in the same way for the other pseudotrajectory. We can apply the estimate of the previous paragraph:

$$\int \mathbb{1}_{B_i} d\hat{x}_i \leq \frac{2C}{\mu_\varepsilon} \sum_{\substack{\nu_i \in \nu_{(i)} \\ \bar{\nu}_i \in \bar{\nu}_{(i)}}} \left(|\rho_{\nu_i}| + |V_{\rho_{\nu_i}}|^2 \right) \left(|\rho_{\bar{\nu}_i}| + |V_{\rho_{\bar{\nu}_i}}|^2 \right) \int_0^{t_{i+1} \wedge T_i} dt_i.$$

In this way, we end up with the same situation as in the estimate of (5.6.13), and we can apply the same strategy:

$$\begin{aligned} & \int \left| \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(Z_p) \Phi_{\underline{n}, n', n'', p}^{k'}(Z_{p+1-m, 2p-m}) \right| M^{\otimes (2p-m)} dX_{2, 2p-m} dV_{2p-m} \\ & \leq \frac{(2p-m)! \|h\|^2}{(p!)^2 \mu_\varepsilon^{2p-m-1}} C^p \delta^2 \varepsilon^\alpha \tau^{(p-n_k-2)_+} t^{n_k-1+p-m} \\ & \leq \frac{\|h\|^2}{p^m \mu_\varepsilon^{2p-m-1}} \tilde{C}^p \delta^2 \varepsilon^\alpha \tau^{(p-n_k-2)_+} t^{n_k-1+p-m} \end{aligned}$$

which concludes the proof. \blacksquare

Proof of (5.6.15) : In $\mathfrak{f}_{p \leftarrow l}[\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h]](Z_{[1, l]}) \mathfrak{X}_{n', p}(Z_{[1, p]})$ we have three set of indices:

- $[1, n']$ the set of particles created in the final pseudotrajectory,
- $[n' + 1, p]$ the particles added in the treatment of local recollision and
- $[p + 1, l]$ particles added in the dynamical cluster development.

Any permutation σ which sends $[1, n']$, $[n' + 1, p]$ and $[p + 1, l]$ onto themselves stabilizes

$$\mathfrak{f}_{p \leftarrow l}[\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h]](Z_{[1, l]}) \mathfrak{X}_{n', p}(Z_{[1, p]})$$

and

$$\Phi_{\underline{n}, n', p, l}^r(Z_l) = \frac{n'!(p - n')!(l - p)!}{l!} \sum_{\substack{\omega_1 \sqcup \omega_2 \sqcup \omega_3 = [l] \\ |\omega_1| = n' \\ |\omega_2| = l - p}} \mathfrak{f}_{p \leftarrow l}[\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h]](Z_{\omega_1 \cup \omega_2}, Z_{\omega_3}) \mathfrak{X}_{n', p}(Z_{\omega_1}, Z_{\omega_2})$$

We develop $\mathfrak{f}_{p \leftarrow l}[\Phi_{\underline{n}, n'}^{0, k'}[h]]$: for $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\underline{\lambda}$ two partitions of $[1, l]$ with $\omega_1 \cup \omega_2 \subset \lambda_1$ and $(s_i, \bar{s}_i)_{1 \leq i \leq n' - 1}$, we define $\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{\omega, \underline{\lambda}} \subset \mathcal{D}_\varepsilon^l$ the set of initial data such that particles in λ_1 form a $(\omega_1 \cup \omega_2)$ -cluster (see the previous part for the definition of cluster pseudotrajectories), and the tree pseudotrajectory $Z_{n'}(\tau, (s_i, \bar{s}_i), Z_{\omega_1}^{\lambda_1}(\delta))$ with $\sum_{i=1}^j k_i$ particles at time $\tau := (k' + 1)\delta + (k - j)\tau$. Then we can write:

$$\begin{aligned} & \Phi_{\underline{n}, n', p, l}^{k'}(Z_l) \\ &= -\frac{1}{l!} \sum_{\substack{\omega_1 \sqcup \omega_2 \sqcup \omega_3 = [l] \\ |\omega_1| = n' \\ |\omega_2| = p - n'}} \sum_{l=1}^l \sum_{\lambda_1 \subset [l]} \sum_{\substack{(\lambda_2, \dots, \lambda_l) \\ \in \mathcal{P}_{\lambda_1}^{l-1}}} \sum_{(s_i, \bar{s}_i)} \sum_{\substack{\mathbf{p} \geq 1 \\ \underline{\omega} \in \mathcal{Q}_{\omega_1, \omega_2}^{\mathbf{p}}}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{\omega, \underline{\lambda}}} h(Z_{n'}(\tau, (s_i, \bar{s}_i), Z_{\omega_1}^{\lambda_1}(\delta))) \\ & \quad \times \prod_{i=1}^p \chi(Z_{\omega_i}) \prod_{i=1}^n \bar{s}_i \prod_{i=2}^l \varphi_{|\lambda_i|}(Z_{\lambda_i}) \psi_l(Z_{\lambda_1}, \dots, Z_{\lambda_l}). \end{aligned}$$

We recall the Penrose's tree inequality (see for example the second section of [BGRS20a] for a proof)

$$\left| \psi_l(Z_{\lambda_1}, \dots, Z_{\lambda_l}) \right| = \left| \sum_{C \in \mathcal{C}(\omega)} \prod_{(i, j) \in E(C)} -\mathbb{1}_{\lambda_i \circ \lambda_j} \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_l} \prod_{(i, j) \in E(T)} \mathbb{1}_{\lambda_i \circ \lambda_j}.$$

Hence we obtain the following bound on $\Phi_{\underline{n}, n', p, l}^{k'}$, invariant under translation:

(5.6.26)

$$\left| \Phi_{\underline{n}, n', p, l}^{k'}(Z_l) \right| \leq \frac{\|h\|}{l!} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{P}_l^3 \\ |\omega_1| = n' \\ |\omega_2| = p}} \sum_{l=1}^l \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_l^l} \sum_{\substack{(s_i, \bar{s}_i) \\ \omega_1 \cup \omega_2 \subset \lambda_1}} \sum_{\mathbf{p} \geq 1} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{\omega, \underline{\lambda}}} \prod_{i=1}^p \chi(Z_{\omega_i}) \prod_{i=2}^l \varphi_{|\lambda_i|}(Z_{\lambda_i}) \\ \quad \times \sum_{T \in \mathcal{T}_l} \prod_{(i, j) \in E(T)} \mathbb{1}_{\lambda_i \circ \lambda_j}.$$

We will use again the distance cluster to control the relations between particles in the time interval $[0, \delta]$. Let $\underline{\rho} := (\rho_1, \dots, \rho_r)$ the distance partition of Z_l . For each ρ_i , we construct the collision parameter $\mathbf{p} := (\underline{\omega}^i, \underline{\lambda}^i, \underline{\omega}^i)$ with:

- $\underline{\omega}^i := (\omega_1^i, \omega_2^i, \omega_3^i)$ is a partition of $\rho_i \cap [1, p]$ defined by $\underline{\omega}_j^i := \omega_j \cap \rho_i$,
 - $\underline{\lambda}^i := \{\lambda_1^i := \lambda_1 \cap \rho_i\} \cup \{\lambda_j \text{ for } j \geq 2 \text{ with } \lambda_j \subset \rho_i\}$ a partition of ρ^i and
 - $\underline{\varpi}^i := \{\varpi_j \text{ such that } \varpi_j \subset \rho_i\}$,
- and we denote $\mathfrak{P}(\rho_i)$ the set of possible \mathbf{p}_i .

The global conditioning bounds velocities, so that particles which form a collisional cluster have to be in a same distance cluster. Thus for each ϖ_j and λ_k , $k \geq 2$ there exists a ρ_i containing λ_k or ϖ_j . In addition for $i \neq i'$, particles in λ_1^i do not interact with particles of $\lambda_1^{i'}$. The overlaps are also contained in the distance cluster: if we denote two dynamical clusters λ_j and $\lambda_{j'}$ with $j, j' \geq 2$, there exists a ρ_i containing both, and if $\lambda_j \subset \rho_i$ has an overlap with λ_1 , then λ_j has an overlap with λ_1^i . This last property allows us to rewrite the overlap cumulant: on $\mathcal{D}_\varepsilon^\rho$,

$$\left| \psi_l(Z_{\lambda_1}, \dots, Z_{\lambda_l}) \right| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_l} \prod_{(i,j) \in E(T)} \mathbb{1}_{\lambda_i \sim \lambda_j} \leq \prod_{i=1}^r \sum_{T_i \in \mathcal{T}_{|\rho_i|}} \prod_{(j,j') \in E(T_i)} \mathbb{1}_{\lambda_j^i \sim \lambda_{j'}^i} \leq \prod_{i=1}^l \left| \mathcal{T}(\rho_i) \right|.$$

We have now the following bound

$$\left| \Phi_{\underline{n}, n', p, l}^{k'}(Z_l) \right| \leq \frac{\|h\|}{l!} \sum_{r=1}^l \sum_{\rho \in \mathcal{P}_l^r} \sum_{\substack{(s_i, \bar{s}_i) \\ \mathbf{p} \in \prod_i \mathfrak{P}(\rho_i)}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{\rho, \mathbf{p}}} \prod_{i=1}^r \Delta_{\mathbf{p}_i}(Z_{\rho_i})$$

with

$$\Delta_{\mathbf{p}_i}(Z_{\rho_i}) := \left| \mathcal{T}(\rho_i) \right| \mathbb{1}_{Z_{\rho_i} \text{ form a distance cluster}} \prod_{j=1}^{|\underline{\varpi}^i|} \chi(Z_{\varpi_j^i}) \text{ and}$$

$$\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{\rho, \mathbf{p}} := \left\{ Z_l \in \mathcal{D}_\varepsilon^\rho, Z_l \in \mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{\omega, \lambda} \right\}.$$

Finally we construct the clustering tree : we consider the collision graph of the particles ω_1 on the time interval $[\delta, t - t_s]$. Then we identify vertices in a same cluster ρ_i and we keep only the first clustering collision. This constructs an ordered tree $T^> \in \mathcal{T}_r^>$.

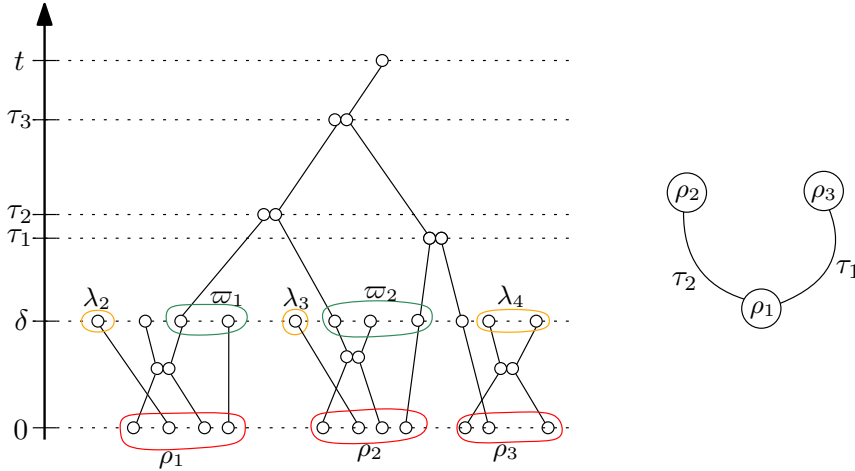


Figure 5.12 – Example of construction of the clustering sets.

As in the previous cases, the condition of respecting the collision history $T^>$ depends only on the relative positions at time δ which are the same than at time 0 (clusters do not interact). We can apply the same method than in the estimation (5.6.13) and we obtain

the expected bound. ■

Proof of (5.6.16) : We adapt the proof of (5.6.14) with the parametrisation of the previous part. ■

5.7 Treatment of the principal part

In this section we conclude the proof of our main theorem (Eq. (5.1.14)), by discussing the main term of the expansion $G_\varepsilon^{\text{main}}(t)$.

5.7.1 Duality formula

We recall that

$$\begin{aligned} G_\varepsilon^{\text{main}}(t) &= \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_K \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1/2} \sum_{(i_1, \dots, i_{n_K})} \Phi_{\underline{n}}^0[h] (\mathbf{Z}_{i_j}(0)) \zeta_\varepsilon^0(g) \right] \\ &= \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_K \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{n_K} \hat{\Phi}_{\underline{n}}^0[h] \hat{g} \right] \end{aligned}$$

where $\Phi_{\underline{n}}^0[h]$ is the development of $h(z_i(t))$ along pseudotrajectories with n_k particles at time $t - n_k \theta$ and no recollision.

We denote

$$(5.7.1) \quad g_n^\varepsilon(Z_n) := \left(\sum_{k=1}^n g(z_k) \right) \frac{1}{Z_\varepsilon} \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int e^{-\mathcal{V}_{n+p}(X_{n+p})} dX_{n+1, n+p}.$$

Then using the equality (5.3.7) and L^1 estimations on $\Phi_{\underline{n}}^0$ of Section 5.4, we have for h and g in L^∞

$$\begin{aligned} G_\varepsilon^{\text{main}}(t) &= \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_K \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \mathbb{E}_\varepsilon \left[\mu_\varepsilon^{-1} \sum_{i_{n_K}} \Phi_{\underline{n}}^0[h] (\mathbf{Z}_{i_{n_K}}(0)) \sum_{j=1}^{n_K} g(z_{i_j}(0)) \right] \\ &\quad + O \left(\varepsilon \sum_{\underline{n}} (Ct)^{n_K} \|h\| \|g\| \right) \\ &= \sum_{\underline{n}} \int \mu_\varepsilon^{n_K-1} \Phi_{\underline{n}}^0[h] (Z_{n_K}) g_{n_K}^\varepsilon(Z_{n_K}) \frac{e^{-\mathcal{H}_{n_K}(Z_{n_K})} dZ_{n_K}}{(2\pi)^{\frac{n_K d}{2}}} \\ &\quad + O \left(\varepsilon \left(K 2^{K^2} (Ct)^{2^{K+1}} \|h\| \|g\| \right) \right). \end{aligned}$$

We want to compute the asymptotics of each term in the sum.

$$\begin{aligned} &\int \mu_\varepsilon^{n_K-1} \Phi_{\underline{n}}^0[h] (Z_{n_K}(0)) g_{n_K}^\varepsilon(Z_{n_K}) \frac{e^{-\mathcal{H}_{n_K}(Z_{n_K})} dZ_{n_K}}{(2\pi)^{\frac{n_K d}{2}}} \\ &= \frac{\mu_\varepsilon^{n_K-1}}{n_K!} \int \sum_{(s_i, \bar{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \bar{s}_i \mathbb{1}_{\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^{\underline{n}}} h(Z_{n_K}(t)) g_{n_K}^\varepsilon(Z_{n_K}) M^{\otimes n_K} dZ_{n_K} \end{aligned}$$

where $\mathcal{R}_{(s_i, \bar{s}_i)}^n \subset \mathcal{D}_\varepsilon^{n_K}$ is the set of initial parameters such that for each $k \in [0, K]$, the pseudotrajectory $Z_{n_K}(\tau, (s_i, \bar{s}_i))$ has n_k particles at time $t - k\theta$, and no recollision.

We order now the annihilations. Fixed an initial position Z_{n_K} and given collision parameters $(s_i, \bar{s}_i)_i$, we can construct a collision tree (a_i, b_i) where the i -th removed particle is b_i , after a collision with a_i . We have a one-to-one correspondence between the admissible $(a_i, b_i)_i$ and the $(s_i)_i$, thus we can change the collision parameters to (a_i, b_i, \bar{s}_i) . Due to the symmetry of $g_{n_K}^\varepsilon$, we can reorder particles by setting $b_i = n_K - i + 1$. Denoting $\tilde{a}_i := a_{n_K - i + 1}$, $\tilde{s}_i := \bar{s}_{n_K - i + 1}$ and $\mathcal{R}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)}^n$ the set of initial parameters respecting the collision constraints $(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_{2 \leq i \leq n_K}$,

$$\begin{aligned} & \int \mu_\varepsilon^{n_K - 1} \Phi_n^0[h](Z_{n_K}) g_{n_K}^\varepsilon(Z_{n_K})^{\otimes n_K} dZ_{n_K} \\ &= \mu_\varepsilon^{n_K - 1} \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=2}^{n_K} \tilde{s}_i \int_{\mathcal{R}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)}^n} h(Z_{n_K}(t)) g_{n_K}^\varepsilon(Z_{n_K}) M^{\otimes n_K} dZ_{n_K}. \end{aligned}$$

Note that the admissible $(a_i)_{2 \leq i \leq n_K}$ verifies $a_i \in [1, i - 1]$.

We define now the *backward pseudocharacteristic*

$$\xi_{n_K}^\varepsilon(\tau, (\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i, z_1, (t_i, \bar{v}_i, \eta_i)_{2 \leq i \leq n_K})$$

with a final point z_1 and parameters $(\tau_i, \bar{v}_i, \eta_i)_{2 \leq i \leq n_K} \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})^{n_K - 1}$ with $t > t_2 > \dots > t_{n_K} > 0$. We construct sequentially the trajectory on each $[t_{i+1}, t_i]$. We begin at time t with particle 1 at z_1 . Let us specify the coordinate of the pseudocharacteristic at time $\tau \in (t_i, t_{i-1})$. In the interval (t_{i+1}, t_i) , there are $i - 1$ particles $\xi_{n_K}^\varepsilon(\tau) = (z_1^\varepsilon(\tau), \dots, z_{i-1}^\varepsilon(\tau))$ which move along straight line (backwards). At time t_i^+ , we add particle i at position $(x_{\tilde{a}_i}^\varepsilon(\tau) + \varepsilon \eta_i, \bar{v}_i)$. If $\tilde{s}_i = 1$ we apply the scattering between particles \tilde{a}_i and i , else the particles do not interact. Note that the velocities $v_i^\varepsilon(\tau)$ do not depend on ε .

We denote $\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{n, 0}(z_1)$ and $\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{n, \varepsilon}(z_1)$ the definition set of pseudocharacteristics: for $z_1 \in \Lambda \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{n, 0}(z_1) &:= \left\{ (t_i, \bar{v}_i, \eta_i)_i \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1})^{n_K - 1} \mid t > t_2 > \dots > t_{n_K} > 0, \right. \\ &\quad \left. \forall i \in [n_{j-1} + 1, n_j], t_i \in (t - j\theta, t - (j - 1)\theta), (v_i^\varepsilon(t_i^+) - \bar{v}_i) \cdot \eta_i < 0 \right\}, \end{aligned}$$

and $\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{n, \varepsilon}(z_1)$ the subset of $\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{n, 0}(z_1)$ such that distances between particles are bigger than ε when one particle is created (trajectories without *overlap*).

We then perform do the change of variables

$$(5.7.2) \quad \begin{aligned} \bigcup_{z_1 \in \mathbb{D}} \{z_1\} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{n, 0}(z_1) &\longrightarrow \mathcal{R}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^n \\ (z_1, (t_i, \bar{v}_i, \eta_i)_i) &\longmapsto \xi_{n_K}^\varepsilon(\tau = 0). \end{aligned}$$

Since we have removed all the recollisions, this map is a bijection. It is a local diffeomorphism, hence a diffeomorphism. It sends a measure

$$(5.7.3) \quad M(v_1) dz_1 d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^n := M(v_1) dz_1 \prod_{i=2}^{n_K} ((v_{a(i)}^\varepsilon(t_i^+) - \bar{v}_i) \cdot \eta_i)_+ M(v_i) d\bar{v}_i d\eta_i dt_i$$

onto $\mu_\varepsilon^{n_K - 1} M^{\otimes n_K} dZ_{n_K}$. We will denote with a little abuse of notation:

$$\mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{n, \varepsilon} := \bigcup_{z_1 \in \mathbb{D}} \{z_1\} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{n, \varepsilon}(z_1).$$

We finally arrive to the following duality formula

$$(5.7.4) \quad \begin{aligned} & \mu_\varepsilon^{n_K-1} \int \Phi_{\underline{n}}^0[h](Z_{n_K}) g_{n_K}^\varepsilon(Z_{n_K}) M^{\otimes n_K}(V_{n_K}) dZ_{n_K} \\ &= \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \tilde{s}_i \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, \varepsilon}} h(z_1) g_{n_K}^\varepsilon(\xi_{n_K}^\varepsilon(0)) M(v_1) dz_1 d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}}. \end{aligned}$$

Denoting

$$g_{n_K}(Z_{n_K}) := \sum_{i=1}^{n_K} g(z_i),$$

we have formally

$$\begin{aligned} & \int \mu_\varepsilon^{n_K-1} \Phi_{\underline{n}}^0(Z_{n_K}) g_{n_K}^\varepsilon(Z_{n_K}) M^{\otimes n_K}(V_{n_K}) dZ_{n_K} \\ & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \tilde{s}_i \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, 0}} h(z_1) g_{n_K}(\xi_{n_K}^0) M^{\otimes n_K}(V_{n_K}) dZ_{n_K} d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}}. \end{aligned}$$

In order to have explicit rates of convergence, we decompose the error in three parts:

$$(5.7.5) \quad \begin{aligned} & \int \mu_\varepsilon^{n_K-1} \Phi_{\underline{n}}^0 g_{n_K}^\varepsilon M^{\otimes n_K}(V_{n_K}) dZ_{n_K} \\ &= \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \tilde{s}_i \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, 0}} h(z_1) g_{n_K}(\xi_{n_K}^0(0)) M(v_1) dz_1 d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}} + R_1 + R_2 + R_3 \end{aligned}$$

$$R_1 = \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \tilde{s}_i \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, 0}} h(z_1) (g_{n_K}(\xi_{n_K}^\varepsilon(0)) - g_{n_K}(\xi_{n_K}^0(0))) M(v_1) dz_1 d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}}$$

$$R_2 = - \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \tilde{s}_i \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, 0}} h(z_1) g_{n_K}(\xi_{n_K}^\varepsilon(0)) \left(1 - \mathbb{1}_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, \varepsilon}(z_1)}\right) M(v_1) dz_1 d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}}$$

$$R_3 = \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \tilde{s}_i \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, \varepsilon}} h(z_1) (g_{n_K}^\varepsilon(\xi_{n_K}^\varepsilon(0)) - g_{n_K}(\xi_{n_K}^\varepsilon(0))) M(v_1) dz_1 d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}}.$$

They are estimated using the following standard results:

Lemma 5.7.1

Fix $\bar{n} := (n_1, \dots, n_k)$. For any $\varepsilon > 0$ sufficiently small, we have for $p \in [1, 2]$ and $z_1 \in \mathbb{D}$

$$(5.7.6) \quad \begin{aligned} & \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \int_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, 0}(z_1)} \left(\prod_{i=2}^{n_K} |v_{\tilde{a}_i}^\varepsilon(t_i^+) - \bar{v}_i|^p M(\bar{v}_i) d\bar{v}_i d\eta_i dt_i \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}|v_1|^2}}{(2\pi)^{d/2}} \\ & \leq (C(K-1)\theta)^{n_K-1} (C\theta)^{n_K-n_{K-1}} e^{-\frac{|v_1|^2}{4}}. \end{aligned}$$

Proof : We follow the proof of Lemma 4.2 in [PS17].

For $i \in [2, n_K]$ we forget parameters $(\tilde{a}_j)_{i < j \leq n_K}$ and $(t_j, \bar{v}_j, \eta_j)_{i < j \leq n_K}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\tilde{a}_i=1}^{i-1} |v_{\tilde{a}_i}^\varepsilon(t_i^+) - \bar{v}_i|^p e^{-\frac{|v_1|^2 + \sum_{j=2}^{i-1} |\bar{v}_j|^2}{8n_K} - \frac{|\bar{v}_i|^2}{8}} \\
& \leq 2^{p-1} \left[\sum_{j=1}^{i-1} |v_j(t_i^+)|^p + (i-1)|\bar{v}_i|^p \right] e^{-\frac{|v_1|^2 + \sum_{j=2}^{i-1} |\bar{v}_j|^2}{8n_K} + \frac{|\bar{v}_i|^2}{8}} \\
& \leq 2^{p-1} \left[\left(\sum_{j=1}^{i-1} |v_j(t_i^+)|^2 \right)^{p/2} (i-1)^{1-p/2} + (i-1)|\bar{v}_i|^p \right] e^{-\frac{|v_1|^2 + \sum_{j=2}^{i-1} |\bar{v}_j|^2}{8n_K} + \frac{|\bar{v}_i|^2}{8}}, \\
& \sum_{\tilde{a}_i=1}^{i-1} |v_{\tilde{a}_i}^\varepsilon(t_i^+) - \bar{v}_i|^p e^{-\frac{|v_1|^2 + \sum_{j=2}^{i-1} |\bar{v}_j|^2}{8n_K} - \frac{|\bar{v}_i|^2}{8}} \\
& \leq 2^{p-1} \left[\left(|v_1|^2 + \sum_{j=2}^{i-1} |\bar{v}_j|^2 \right)^{p/2} (i-1)^{1-p/2} + (i-1)|\bar{v}_i|^p \right] e^{-\frac{|v_1|^2 + \sum_{j=2}^{i-1} |\bar{v}_j|^2}{8n_K} + \frac{|\bar{v}_i|^2}{8}} \\
& \leq C \left[n_K^{p/2} (i-1)^{1-p/2} + (i-1) \right] \leq C n_K.
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
& \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \int_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\mathbb{R}^n, 0}(z_1)} \left(\prod_{i=2}^{n_K} |v_{\tilde{a}_i}^\varepsilon(t_i^+) - \bar{v}_i|^p M(\bar{v}_i) d\bar{v}_i d\eta_i dt_i \right) \frac{e^{-\frac{1}{2}|v_1|^2}}{(2\pi)^{d/2}} \\
& \leq \int_\theta^{K\theta} dt_2 \cdots \int_\theta^{t_{n_K-1}-1} dt_{n_K-1} \int_0^\theta dt_{n_K-1+1} \cdots \int_0^{t_{n_K}-1} dt_{n_K} \\
& \quad \times \int_{(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^d)^{n_K-1}} C^{n_K-1} n_K^{n_K-1} e^{-\frac{|v_1|^2 + \sum_{j=2}^{i-1} |\bar{v}_j|^2}{4}} \left(\prod_{i=2}^{n_K} \frac{d\bar{v}_i d\eta_i}{(2\pi)^{d/2}} \right) \\
& \leq \frac{C(C(K-1)(n_K-1)\theta)^{n_K-1} (C\theta n_K)^{n_K-n_K-1}}{(n_{K-1}-1)! (n_K-n_{K-1})!} \leq (\tilde{C}t)^{n_K}.
\end{aligned}$$

■

Lemma 5.7.2

Fix $\bar{n} := (n_1, \dots, n_K)$. For any $\varepsilon > 0$ sufficiently small, we have

$$(5.7.7) \quad \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\mathbb{R}^n, 0}} \left| 1 - \mathbb{1}_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\mathbb{R}^n, \varepsilon}(z_1)} \right| M(v_1) dz_1 d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\bar{n}} \leq (Ct)^{n_K} \varepsilon^\alpha.$$

This is an estimation of the set of parameters leading to an overlap. It can be obtained in the same as the estimation of recollisions of Section 5.3.

From Lemma 5.7.2 we deduce

$$|R_1| \leq C(Ct)^{n_K} \varepsilon^\alpha \|g\| \|h\|.$$

Lemma 5.7.3

Fix $\bar{n} := (n_1, \dots, n_k)$, $\varepsilon > 0$ sufficiently small, and $X_{n_K} \in \Lambda^{n_K}$ such that for $i \neq j$

$$|x_i - x_j| > \varepsilon.$$

Then

$$(5.7.8) \quad \left| 1 - \frac{1}{\mathcal{Z}_\varepsilon} \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int e^{-\mathcal{V}_{n_K+p}(X_{n_K}, \bar{X}_p)} d\bar{X}_p \right| \leq C^{n_K} \varepsilon.$$

Proof : Using the formula (5.3.9), for any $X_{n_K} \in \Lambda^{n_K}$ with $|x_i - x_j| > \varepsilon$ for $i \neq j$,

$$\begin{aligned} \exp(-\mathcal{V}_{n_K+p}^\varepsilon(X_{n_K}, \underline{X}_p)) &= \sum_{\omega \subset [1,p]} e^{-\mathcal{V}_{n_K}^\varepsilon(X_{n_K}) - \mathcal{V}_{|\omega^c|}^\varepsilon(\underline{X}_{\omega^c})} \psi_p^{n_K}(X_{n_K}, \underline{X}_\omega) \\ &= \sum_{\omega \subset [1,p]} e^{-\mathcal{V}_{|\omega^c|}^\varepsilon(\underline{X}_{\omega^c})} \psi_p^{n_K}(X_{n_K}, \underline{X}_\omega). \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int e^{-\mathcal{V}_{n_K+p}(X_{n_K}, \bar{X}_p)} d\bar{X}_p &= \sum_{p \geq 0} \sum_{p_1+p_2=p} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \frac{p!}{p_1! p_2!} \int e^{-\mathcal{V}_{p_2}^\varepsilon(\underline{X}'_{p_2})} \psi_{p_1}^{n_K}(X_{n_K}, \underline{X}_{p_1}) d\bar{X}_{p_1} d\bar{X}'_{p_2} \\ &= \mathcal{Z}_\varepsilon \sum_{p \geq 0} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int \psi_p^{n_K}(X_{n_K}, \underline{X}_p) d\bar{X}_p \\ &= \mathcal{Z}_\varepsilon \left(1 + \sum_{p \geq 1} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int \psi_p^{n_K}(X_{n_K}, \underline{X}_p) d\bar{X}_p \right). \end{aligned}$$

Using the estimation (5.3.12),

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 1} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} \int \psi_p^{n_K}(X_{n_K}, \underline{X}_p) d\bar{X}_p &\leq \sum_{p \geq 1} \frac{\mu_\varepsilon^p}{p!} (p-1)! (C\varepsilon^d)^p n_K e^{n_K} \\ &\leq \sum_{p \geq 1} (C'\varepsilon)^p n_K e^{n_K} \\ &\leq 2\varepsilon n_K e^{n_K} \end{aligned}$$

for ε small enough. This concludes the proof. ■

Using Lemmata 5.7.1 and 5.7.3 we obtain

$$|R_3| = C(Ct)^{n_K} \varepsilon \|g\| \|h\|.$$

Lemma 5.7.4

Fix $\bar{n} := (n_1, \dots, n_k)$, $\varepsilon > 0$ and $(z_1, (t_i, \bar{v}_i, \eta_i)_i) \in \mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\bar{a}_i, \bar{s}_i)_i}^{n, \varepsilon}$. We have

$$(5.7.9) \quad |\xi_{n_K}^\varepsilon(0) - \xi_{n_K}^0(0)| \leq n_K^{3/2} \varepsilon.$$

Proof : We recall first that the two trajectories $\xi_{n_K}^\varepsilon(\tau)$ and $\xi_{n_K}^0(\tau)$ have coincident velocities and at each annihilation of a particle there is a new shift of size ε . Thus for any i bigger than 1, $|x_i^\varepsilon(\tau) - x_i^0(\tau)| \leq (i-1)\varepsilon$ and, summing up,

$$|\xi_{n_K}^\varepsilon(\tau) - \xi_{n_K}^0(\tau)|^2 \leq n_K^3 \varepsilon^2.$$

If g is uniformly Lipschitz, by Lemmata 5.7.1 and 5.7.4 we get

$$|R_1| = C(Ct)^{n_K} \varepsilon \|\nabla g\| \|h\|.$$

Finally we get for h and g Lipschitz

$$\begin{aligned} & \int \mu_\varepsilon^{n_K-1} \Phi_{\underline{n}}^0 g_{n_K}^\varepsilon M^{\otimes n_K} dZ_{n_K} \\ &= \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \tilde{s}_i \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{n,0}} h(z_1) g_{n_K}(\xi_{n_K}^0(0)) M(v_1) dz_1 d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^n \\ & \quad + O\left(\varepsilon^\alpha (Ct)^{n_K} \|h\| (\|g\| + \|\nabla g\|)\right). \end{aligned}$$

and therefore

$$(5.7.10) \quad \begin{aligned} G_\varepsilon^{\text{main}}(t) &= \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_K \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \tilde{s}_i \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{n,0}} h(z_1) g_{n_K}(\xi_{n_K}^0) M(v_1) dz_1 d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^n \\ & \quad + O\left(\varepsilon^\alpha K 2^{K^2} (Ct)^{2^{K+1}} \|h\| (\|g\| + \|\nabla g\|)\right). \end{aligned}$$

5.7.2 Linearized Boltzmann equation

Let $\mathbf{g}(t)$ be the solution of the linearized Boltzmann equation:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{g}(t) + v \cdot \nabla_x \mathbf{g}(t) &= \mathcal{L} \mathbf{g}(t) \text{ for } (t, x, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{D} \\ \mathbf{g}(t=0) &= g \text{ on } \mathbb{D}, \end{aligned}$$

and \mathcal{L} the linearized Boltzmann operator:

$$\mathcal{L}g(v) := \int_{\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^d} (g(v') + g(\bar{v}') - g(v) - g(\bar{v})) ((v - \bar{v}) \cdot \eta)_+ M(\bar{v}) d\eta d\bar{v}$$

with (v', \bar{v}') defined by the scattering rule (5.1.11).

We can write this equation in Duhamel form: denoting $S(\tau)$ the semigroup associated with $v \cdot \nabla_x$,

$$\mathbf{g}(t) = S(t)g + \int_0^t S(t - \tau_1) \mathcal{L} \mathbf{g}(\tau_1) d\tau_1.$$

We want to iterate this formula, but cutting trees with superexponential growth of the number of annihilation (as in the hard sphere system): defining

$$Q_{m,n}(\tau)[g] = \int_0^\tau dt_{m+1} \int_0^{t_{m+1}} \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n S(t - t_{m+1}) \mathcal{L} S(t_{m+1} - t_{m+2}) \dots \mathcal{L} S(t_n) g,$$

and for $\underline{n} := (n_1, \dots, n_k)$ with $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$,

$$Q_{\underline{n}}(\tau)g = Q_{1,n_1}(\frac{\tau}{k}) Q_{n_1,n_2}(\frac{\tau}{k}) \dots Q_{n_{k-1},n_k}(\frac{\tau}{k})[g],$$

we have

$$(5.7.11) \quad \mathbf{g}(t) = \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_K \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} Q_{\underline{n}}(t)[g] + \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_{k-1} \\ n_j - n_{j-1} \leq 2^j}} \sum_{n_k > 2^k} Q_{\underline{n}}(k\tau)[\mathbf{g}(t - k\theta)].$$

If g is continuous and bounded, we find the following characteristic formula for $Q_{1,2}(t)[g]$

$$\begin{aligned} Q_{1,2}(\tau)[g](x, v) &= \int_0^\tau d\tau_2 S(\tau - \tau_2) \mathcal{L}S(\tau_2)[g](x, v) \\ &= \int_0^\tau d\tau_2 \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3} \left(S(\tau_2)[g](x - (t - \tau_2)v, v') + S(\tau_2)[g](x - (t - \tau_2)v, \bar{v}') \right. \\ &\quad \left. - S(\tau_2)[g](x - (t - \tau_2)v, \bar{v}) - S(\tau_2)[g](x - (t - \tau_2)v, v) \right) ((v - \bar{v}) \cdot \eta)_+ M(v_*) d\eta d\bar{v} d\tau_2 \\ &= \int_{\mathbb{G}_{(1,1)}^{(2),0}} g_2(\xi_2^0) d\Lambda_{(1,1)}^{(2)} - \int_{\mathbb{G}_{(1,-1)}^{(2),0}} g_2(\xi_2^0) d\Lambda_{(1,-1)}^{(2)} \end{aligned}$$

where we denote as in the previous paragraph

$$g_n(\theta, Z_n) := \sum_{i=1}^n g(t, z_i).$$

We can iterate this construction:

$$(5.7.12) \quad Q_{\underline{n}}(t)[g](z_1) = \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \tilde{s}_i \int_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n},0}(z_1)} g_{n_K}(\xi_{n_K}^0) d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}}.$$

The first term of (5.7.11) corresponds to the main part of $\mathbb{E}_\varepsilon[\zeta_\varepsilon^t(h)\zeta_\varepsilon^0(g)]$. The second one is treated by the following L^2 estimation:

Proposition 5.7.5

There exists a constant C such that for any $g \in L^2(M(v)dz)$, and $\underline{n} := (n_1, \dots, n_k)$,

$$(5.7.13) \quad \|Q_{\underline{n}}(k\theta)g\|_{L^2(M^2(v)dz)} \leq (C(k-1)\theta)^{\frac{n_k-1}{2}} (C\theta)^{\frac{n_k-n_{k-1}}{2}} \|g\|_{L^2(M(v)dz)}.$$

Proof : The proof is given in section 4.4 of [BGS17]. We suppose that g is continuous in order to use the pseudocharacteristic formula, and we conclude by density.

Using Cauchy-Schwarz inequality,

$$\begin{aligned} &\|Q_{\underline{n}}(k\theta)g\|_{L^2(M^2(v)dz)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{D}} \left(\sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \prod_{i=1}^{n_K-1} \tilde{s}_i \int_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n},0}(z_1)} g_{n_K}(\xi_{n_K}^0) d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}} \right)^2 M^2(v_1) dz_1 \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} \left(M(z_1) \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \int_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n},0}(z_1)} d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{q,\underline{n}} \right) \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \int_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n},0}(z_1)} g_{n_K}^2(\xi_{n_K}^0) d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{b,\underline{n}} M(v_1) dz_1 \end{aligned}$$

where

$$d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{b,\underline{n}} := M(v_1) dz_1 \prod_{i=2}^{n_K} \frac{((v_{a(i)}^\varepsilon(t_i^+) - \bar{v}_i) \cdot \eta_i)_+}{1 + |v_{a(i)}^\varepsilon(t_i^+) - \bar{v}_i|} M(\bar{v}_i) d\bar{v}_i d\eta_i dt_i,$$

$$d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{q,\underline{n}} := M(v_1) dz_1 \prod_{i=2}^{n_K} ((v_{a(i)}^\varepsilon(t_i^+) - \bar{v}_i) \cdot \eta_i)_+ \left(1 + |v_{a(i)}^\varepsilon(t_i^+) - \bar{v}_i|\right) M(\bar{v}_i) d\bar{v}_i d\eta_i dt_i.$$

From (5.7.2) we have the bound

$$\left(M(z_1) \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \int_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n},0}(z_1)} d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{q,\underline{n}} \right) \leq (C(k-1)\theta)^{n_{k-1}} (C\theta)^{n_k-n_{k-1}}.$$

On the other hand, using the representation formula in the reverse sense,

$$\begin{aligned} & \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \int_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, 0}(z_1)} g_{n_K}^2(\xi_{n_K}^0) d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{b, \underline{n}} \\ & \leq n_K \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \int_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, 0}(z_1)} (g^2)_{n_K}(\xi_{n_K}^0) d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{b, \underline{n}} \\ & \leq n_K \int_{\theta}^{k\theta} dt_2 \cdots \int_{\theta}^{t_{n_{k-1}-1}} dt_{n_K} \int_0^{\theta} dt_{n_{k-1}+1} \cdots \int_0^{t_{n_k-1}} dt_{n_k} S(t-t_2) |L^b| \cdots |L^b| S(t_n) g^2 \end{aligned}$$

with

$$|L^b|g(v) := \int_{\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}^d} (g(v') + g(\bar{v}') + g(v) + g(\bar{v})) \frac{((v - \bar{v}) \cdot \eta)_+}{1 + |v - \bar{v}|} M(\bar{v}) d\eta d\bar{v}$$

and

$$(g^2)_{n_K}(Z_{n_K}) := \sum_{i=1}^{n_k} g^2(z_i).$$

Lemma 5.7.6

The operator $|L^b| : L^1(M(v)dz) \rightarrow L^1(M(v)dz)$ is bounded.

Proof : For $f \in L^1(M(v)dz)$, using the change of variables $(v, \bar{v}, \eta) \mapsto (v', \bar{v}', \eta)$ sending $(v - \bar{v}) \cdot \eta)_+ dv d\bar{v} d\eta \rightarrow (v' - \bar{v}') \cdot \eta)_- dv' d\bar{v}' d\eta$,

$$\int_{\mathbb{D}} |L^b|f(z)M(v)dz = 4 \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3} f(z)M(v)M(\bar{v})dzd\eta d\bar{v} \leq 16\pi \|f\|_{L^1(M(v)dz)}.$$

We use now that $S(t)$ conserves the $L^1(M(v)dz)$ norm. Integrating the times variables,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{D}} \sum_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i} \int_{\mathbb{G}_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{\underline{n}, 0}(z_1)} g_{n_K}^2(\xi_{n_K}^0) d\Lambda_{(\tilde{a}_i, \tilde{s}_i)_i}^{b, \underline{n}} M(v_1)dz_1 \\ & \leq \frac{(C(k-1)\theta)^{n_{k-1}} (C\theta)^{n_k - n_{k-1}}}{n_{k-1}!(n_k - n_{k-1})!} \|g\|_{L^2(M(v)dz)} \end{aligned}$$

which concludes the proof of the proposition. \blacksquare

Because $\|g(t)\|_{L^2(M(z)dz)}$ is decreasing, we have for $\|h\| < \infty$ (we use here the weight of the norm $\|h\| \approx \sup |M^{-1}h|$).

(5.7.14)

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle h, \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{(n_j)_{j \leq k-1} \\ n_j \leq 2^j}} \sum_{n_k > 2^k} Q_{\underline{n}}(k\theta) g(t - k\theta) \right\rangle_{L^2(M(v)dz)} \right| \leq \sum_{k=1}^K (C^2 t \theta)^{k/2} \|h\| \|g\|_{L^2(M(v)dz)} \\ & \leq Ct^{1/2} \theta^{1/2} \|h\| \|g\|. \end{aligned}$$

Using all the estimations (5.4.1), (5.5.1), (5.6.1), (5.7.10) and (5.7.14), we finally get that

(5.7.15)

$$\mathbb{E}_{\varepsilon} \left[\zeta_{\varepsilon}^t(h) \zeta_{\varepsilon}^0(g) \right] = \left\langle h, g(t) \right\rangle_{L^2(M(v)dz)} + O\left(\left(Ct\theta^{1/2} + (Ct)^{2t/\theta} \varepsilon^{\alpha/2} \right) \|h\| (\|g\| + \|\nabla g\|) \right).$$

This concludes the proof of the main theorem.

Bibliographie

- [AB91] A. Arsen'ev and O. Buryak. On the connection between a solution of the Boltzmann equation and a solution of the Landau-Fokker-Planck equation. *Math. USSR Sb.*, 69(2) :465, 1991. Publisher : IOP Publishing.
- [Ale75] Roger Keith Alexander. *THE INFINITE HARD-SPHERE SYSTEM*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1975. Thesis (Ph.D.)–University of California, Berkeley.
- [AMP22] Ioakeim Ampatzoglou, Joseph K. Miller, and Nataša Pavlović. A rigorous derivation of a Boltzmann system for a mixture of hard-sphere gases. *SIAM J. Math. Anal.*, 54(2) :2320–2372, 2022.
- [AV04] R. Alexandre and C. Villani. On the Landau approximation in plasma physics. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 21(1) :61–95, 2004.
- [Ayi16] Nathalie Ayi. *Influence du Stochastique sur des Problématiques de Changements d'Échelle*. PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, 2016.
- [Ayi17] Nathalie Ayi. From newton's law to the linear boltzmann equation without cut-off. *Communications in Mathematical Physics*, 350(3) :1219–1274, Mar 2017.
- [Bal75] R. Balescu. *Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics*. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Ltd., London-New York-Sydney, 1975.
- [BBS83] C. Boldrighini, L. A. Bunimovich, and Ya. G. Sinai. On the Boltzmann equation for the Lorentz gas. *J. Stat. Phys.*, 32 :477–501, 1983.
- [BC99] Alexander V. Bobylev and Carlo Cercignani. On the rate of entropy production for the Boltzmann equation. *J. Stat. Phys.*, 94(3-4) :603–618, 1999.
- [Ber38] Daniel Bernoulli. *Hydrodynamica : sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*. 1738.
- [BFK98] D. Burago, S. Ferleger, and A. Kononenko. Uniform estimates on the number of collisions in semi-dispersing billiards. *Ann. Math. (2)*, 147(3) :695–708, 1998.
- [BG46] M. Born and H. S. Green. A general kinetic theory of liquids. I. The molecular distribution functions. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 188 :10–18, 1946.
- [BGS16] Thierry Bodineau, Isabelle Gallagher, and Laure Saint-Raymond. The Brownian motion as the limit of a deterministic system of hard-spheres. *Invent. Math.*, 203(2) :493–553, 2016.
- [BGS17] Thierry Bodineau, Isabelle Gallagher, and Laure Saint-Raymond. From hard sphere dynamics to the Stokes-Fourier equations : an L^2 analysis of the Boltzmann-Grad limit. *Ann. PDE*, 3(1) :118, 2017. Id/No 2.

- [BGSR19] Thierry Bodineau, Isabelle Gallagher, and Laure Saint-Raymond. A microscopic view of the Fourier law. *Comptes Rendus Physique*, 20(5) :402–418, 2019.
- [BGSRS18] Thierry Bodineau, Isabelle Gallagher, Laure Saint-Raymond, and Sergio Simonella. One-sided convergence in the Boltzmann-Grad limit. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (6)*, 27(5) :985–1022, 2018.
- [BGSRS20a] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and S. Simonella. Statistical dynamics of hard sphere gas : fluctuating Boltzmann equation and large deviation. 2020.
- [BGSRS20b] Thierry Bodineau, Isabelle Gallagher, Laure Saint-Raymond, and Sergio Simonella. Fluctuation theory in the Boltzmann-Grad limit. *J. Stat. Phys.*, 180(1-6) :873–895, 2020.
- [BGSRS21] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and S. Simonella. Long-time correlations for a hard-sphere gas at equilibrium. 2021.
- [BGSRS22] T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and S. Simonella. Long-time derivation at equilibrium of the fluctuating Boltzmann equation. 2022.
- [BJS22] Didier Bresch, Pierre-Emmanuel Jabin, and Juan Soler. A new approach to the mean-field limit of vlasov-fokker-planck equations. *arXiv preprint arXiv :2203.15747*, 2022.
- [BJW19] Didier Bresch, Pierre-Emmanuel Jabin, and Zhenfu Wang. On mean-field limits and quantitative estimates with a large class of singular kernels : application to the Patlak-Keller-Segel model. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 357(9) :708–720, 2019.
- [BJW20] Didier Bresch, Pierre-Emmanuel Jabin, and Zhenfu Wang. Modulated free energy and mean field limit. *Sémin. Laurent Schwartz, EDP Appl.*, 2019-2020 :ex, 2020.
- [BM05] C. Baranger and C. Mouhot. Explicit spectral gap estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators with hard potentials. *Revista Matemática Iberoamericana*, 21(3) :819–841, 2005.
- [BNP14] G. Basile, A. Nota, and M. Pulvirenti. A Diffusion Limit for a Test Particle in a Random Distribution of Scatterers. *J Stat Phys*, 155(6) :1087–1111, June 2014.
- [Bog60] Nikolaï Nikolaevich Bogoliubov. Problems of a dynamical theory in statical physics. Technical report, AIR FORCE CAMBRIDGE RESEARCH LABS HANSCOM AFB MA, 1960.
- [Bol96] Ludwig Boltzmann. Vorlesungen über Gastheorie. 1. Teil. Theorie der Gase mit ein-atomigen Molecülen, deren Dimensionen gegen die mittlere Weglänge verschwinden. Leipzig : J. A. Barth. viii, 204 S. (1896)., 1896.
- [Bol64] Ludwig Boltzmann. *Lectures on gas theory*. Translated by Stephen G. Brush. University of California Press, Berkeley-Los Angeles, Calif., 1964.
- [BPS13] A. Bobylev, M. Pulvirenti, and C. Saffirio. From Particle Systems to the Landau Equation : A Consistency Result. *Commun. Math. Phys.*, 319(3) :683–702, 2013.
- [Car33] Torsten Carleman. Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 23(22) :1–7, 1933.
- [Cat] Nicolò Catapano. L^∞ per il flusso di knudsen con condizioni diffusive al bordo. Master's thesis.

- [Cat18] Nicolo' Catapano. The rigorous derivation of the linear Landau equation from a particle system in a weak-coupling limit. *Kinet. Relat. Models*, 11(3) :647–695, 2018.
- [CDW22] J. Carrillo, M. Delgadino, and J. Wu. Boltzmann to Landau from the gradient flow perspective. *Nonlinear Analysis*, 219 :112824, 2022.
- [Cer88] Carlo Cercignani. *The Boltzmann equation and its applications*, volume 67 of *Appl. Math. Sci.* New York etc. : Springer-Verlag, 1988.
- [Cer00] Carlo Cercignani. *Rarefied gas dynamics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. From basic concepts to actual calculations.
- [CG08] Emanuele Caglioti and François Golse. The Boltzmann-Grad limit of the periodic Lorentz gas in two space dimensions. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 346(7-8) :477–482, 2008.
- [CG10] Emanuele Caglioti and François Golse. On the Boltzmann-Grad limit for the two-dimensional periodic Lorentz gas. *J. Stat. Phys.*, 141(2) :264–317, 2010.
- [CIP94] Carlo Cercignani, Reinhard Illner, and Mario Pulvirenti. *The mathematical theory of dilute gases*, volume 106 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [CP96] S. Caprino and M. Pulvirenti. The Boltzmann-Grad limit for a one-dimensional Boltzmann equation in a stationary state. *Commun. Math. Phys.*, 177(1) :63–81, 1996.
- [CPSV09] Francis Comets, Serguei Popov, Gunter M. Schütz, and Marina Vachkovskaia. Billiards in a general domain with random reflections. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 191(3) :497–537, 2009.
- [Den18] Ryan Denlinger. The propagation of chaos for a rarefied gas of hard spheres in the whole space. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 229(2) :885–952, 2018.
- [Des92] L. Desvillettes. On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing. *Transport Theory and Statistical Physics*, 21(3) :259–276, 1992.
- [DGL87] D. Dürr, S. Goldstein, and J. Lebowitz. Asymptotic motion of a classical particle in a random potential in two dimensions : Landau model. *Commun. Math. Phys.*, 113(2) :209–230, 1987.
- [DHTZ21] R. Duan, L. He, Y. Tong, and Y. Zhou. Solutions to the non-cutoff Boltzmann equation in the grazing limit, 2021. arXiv :2105.13606 [math].
- [DL89] R. J. DiPerna and P. L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations : Global existence and weak stability. *Ann. Math. (2)*, 130(2) :321–366, 1989.
- [DLD92] P. Degond and B. Lucquin-Desreux. The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 02(02) :167–182, 1992. Publisher : World Scientific Publishing Co.
- [Dob79] R. L. Dobrushin. Vlasov equations. *Funct. Anal. Appl.*, 13 :115–123, 1979.
- [Dol19] Théophile Dolmaire. *Etude mathématique de la dérivation de l'équation de Boltzmann dans un domaine à bord*. PhD thesis, Université de Paris, 2019.
- [Dol22] Théophile Dolmaire. About Lanford's theorem in the half-space with specular reflection. *Kinet. Relat. Models*, 16(2) :207–268, 2022.

- [DP99] L. Desvillettes and M. Pulvirenti. The linear boltzmann equation for long-range forces : a derivation from particle systems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 09(08) :1123–1145, 1999. Publisher : World Scientific Publishing Co.
- [DR01] L. Desvillettes and V. Ricci. A rigorous derivation of a linear kinetic equation of Fokker–Planck type in the limit of grazing collisions. *Journal of Statistical Physics*, 104(5) :1173–1189, 2001.
- [DS18] Mitia Duerinckx and Sylvia Serfaty. Mean-field dynamics for Ginzburg–Landau vortices with pinning and forcing. *Ann. PDE*, 4(2) :172, 2018. Id/No 19.
- [DSR21] Mitia Duerinckx and Laure Saint-Raymond. Lenard-Balescu correction to mean-field theory. *Probab. Math. Phys.*, 2(1) :27–69, 2021.
- [Due21] Mitia Duerinckx. On the size of chaos via Glauber calculus in the classical mean-field dynamics. *Commun. Math. Phys.*, 382(1) :613–653, 2021.
- [EGKM13] R. Esposito, Y. Guo, C. Kim, and R. Marra. Non-isothermal boundary in the Boltzmann theory and Fourier law. *Commun. Math. Phys.*, 323(1) :177–239, 2013.
- [EGKM18] Raffaele Esposito, Yan Guo, Chanwoo Kim, and Rossana Marra. Stationary solutions to the Boltzmann equation in the hydrodynamic limit. *Ann. PDE*, 4(1) :119, 2018. Id/No 1.
- [EGM11] Raffaele Esposito, Yan Guo, and Rossana Marra. Validity of the Boltzmann equation with an external force. *Kinet. Relat. Models*, 4(2) :499–515, 2011.
- [EM20] R. Esposito and R. Marra. Stationary non equilibrium states in kinetic theory. *J. Stat. Phys.*, 180(1-6) :773–809, 2020.
- [Erd12] László Erdős. Lecture notes on quantum Brownian motion. In *Quantum theory from small to large scales. École de Physique des Houches, Session XCV, 2–27 August 2010*, pages 3–98. Oxford : Oxford University Press, 2012.
- [ESY07] László Erdős, Manfred Salmhofer, and Horng-Tzer Yau. Quantum diffusion of the random Schrödinger evolution in the scaling limit. II : The recollision diagrams. *Commun. Math. Phys.*, 271(1) :1–53, 2007.
- [ESY08] László Erdős, Manfred Salmhofer, and Horng-Tzer Yau. Quantum diffusion of the random Schrödinger evolution in the scaling limit. *Acta Math.*, 200(2) :211–277, 2008.
- [Eul57] Leonhard Euler. Principes généraux du mouvement des fluides. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, pages 274–315, 1757.
- [FGS84] J Farmer, S Goldstein, and ER Speer. Invariant states of a thermally conducting barrier. *Journal of statistical physics*, 34(1-2) :263–277, 1984.
- [Gal69] Giovanni Gallavotti. Divergences and the approach to equilibrium in the lorentz and the wind-tree models. *Physical Review*, 185(1) :308, 1969.
- [GG18] Viktor Gerasimenko and Igor Gapyak. Low-density asymptotic behavior of observables of hard sphere fluids. *Adv. Math. Phys.*, 2018 :11, 2018. Id/No 6252919.
- [GHJO20] Yan Guo, Hyung Ju Hwang, Jin Woo Jang, and Zhimeng Ouyang. The Landau equation with the specular reflection boundary condition. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 236(3) :1389–1454, 2020.
- [GKI85] S. Goldstein, C. Kipnis, and N. Ianiro. Stationary states for a mechanical system with stochastic boundary conditions. *J. Stat. Phys.*, 41 :915–939, 1985.

- [GKTT17] Yan Guo, Chanwoo Kim, Daniela Tonon, and Ariane Trescases. Regularity of the Boltzmann equation in convex domains. *Invent. Math.*, 207(1) :115–290, 2017.
- [GLP81] S. Goldstein, J. L. Lebowitz, and E. Presutti. Mechanical system with stochastic boundaries. Random fields. Rigorous results in statistical mechanics and quantum field theory, Esztergom 1979, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 27, 403-419 (1981)., 1981.
- [GLR82] Sheldon Goldstein, Joel L Lebowitz, and Krishnamurthi Ravishankar. Ergodic properties of a system in contact with a heat bath : a one dimensional model. *Communications in Mathematical Physics*, 85(3) :419–427, 1982.
- [GLR86] S Goldstein, JL Lebowitz, and K Ravishankar. Approach to equilibrium in models of a system in contact with a heat bath. *Journal of statistical physics*, 43(1-2) :303–315, 1986.
- [Gou97] T. Goudon. On Boltzmann equations and Fokker-Planck asymptotics : Influence of grazing collisions. *J Stat Phys*, 89(3) :751, 1997.
- [Gra49] Harold Grad. On the kinetic theory of rarefied gases. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2 :331–407, 1949.
- [Gra58] Harold Grad. *Principles of the kinetic theory of gases*. Handbuch der Physik, Bd. 12, Thermodynamik der Gase. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958. Herausgegeben von S. Flügge.
- [GSRT13] Isabelle Gallagher, Laure Saint-Raymond, and Benjamin Texier. *From Newton to Boltzmann : hard spheres and short-range potentials*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2013.
- [Gui70] J. P. Guiraud. Problème aux limites intérieur pour l'équation de Boltzmann linéaire. *J. Méc., Paris*, 9 :443–490, 1970.
- [Gui72] Jean-Pierre Guiraud. Problème aux limites intérieur pour l'équation de Boltzmann en regime stationnaire, faiblement non linéaire. *J. Méc., Paris*, 11 :183–231, 1972.
- [Guo10] Yan Guo. Decay and continuity of the Boltzmann equation in bounded domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 197(3) :713–809, 2010.
- [He14] L. He. Asymptotic analysis of the spatially homogeneous Boltzmann equation : grazing collisions limit. *J Stat Phys*, 155(1) :151–210, 2014.
- [Hil12] D. Hilbert. Begründung der kinetischen Gastheorie. *Math. Ann.*, 72 :562–577, 1912.
- [Ill89] Reinhard Illner. On the number of collisions in a hard sphere particle system in all space. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 18(1) :71–86, 1989.
- [Ill90] Reinhard Illner. Finiteness of the number of collisions in a hard sphere particle system in all space. II : Arbitrary diameters and masses. *Transp. Theory Stat. Phys.*, 19(6) :573–579, 1990.
- [IP89] R. Illner and M. Pulvirenti. Global validity of the Boltzmann equation for two- and three-dimensional rare gas in vacuum. Erratum and improved result : “Global validity of the Boltzmann equation for a two-dimensional rare gas in vacuum” [Comm. Math. Phys. **105** (1986), no. 2, 189–203 ; MR0849204 (88d :82061)] and “Global validity of the Boltzmann equation for a three-dimensional rare gas in vacuum” [ibid. **113** (1987), no. 1, 79–85 ; MR0918406 (89b :82052)] by Pulvirenti. *Comm. Math. Phys.*, 121(1) :143–146, 1989.

- [Jan] S. Jansen. Gibbsian point process. <https://www.mathematik.uni-muenchen.de/jansen/gibbspp.pdf>.
- [JW16] Pierre-Emmanuel Jabin and Zhenfu Wang. Mean field limit and propagation of chaos for Vlasov systems with bounded forces. *J. Funct. Anal.*, 271(12) :3588–3627, 2016.
- [Kin75] Francis Gordon King. BBGKY hierarchy for positive potentials. Technical report, University of California, Berkeley, United States, 1975. INIS Reference Number : 8284567.
- [Kir46] John G Kirkwood. The statistical mechanical theory of transport processes i. general theory. *The Journal of Chemical Physics*, 14(3) :180–201, 1946.
- [KP80] H. Kesten and G. Papanicolaou. A limit theorem for stochastic acceleration. *Commun.Math. Phys.*, 78(1) :19–63, 1980.
- [Lan36] L. Landau. Die kinetische Gleichung für den Fall Coulombscher Wechselwirkung. *Phys. Zs. Sow. Union*, 10(154) :163–170, 1936.
- [Lan75] Oscar E. Lanford, III. Time evolution of large classical systems. In *Dynamical systems, theory and applications (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974)*, pages 1–111. Lecture Notes in Phys., Vol. 38. 1975.
- [LB19] Corentin Le Bihan. Convergence d’un système de sphères dures vers une solution de l’équation de Stokes-Fourier avec bord. Master’s thesis, ENS de Lyon, 2019.
- [LB22a] Corentin Le Bihan. Boltzmann-Grad limit of a hard sphere system in a box with isotropic boundary conditions. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 42(4) :1903–1932, 2022.
- [LB22b] Corentin Le Bihan. Long time validity of the linearized Boltzmann equation for hard spheres : a proof without billiard theory. <https://arxiv.org/pdf/2212.04392.pdf>, 2022.
- [LBW22] Corentin Le Bihan and Raphael Winter. The grazing collisions limit from the linearized Boltzmann equation to the Landau equation for short-range potentials. *Kinetic and Related Models*, 2022. <https://arxiv.org/pdf/2208.14918.pdf>.
- [Lev12] C. David Levermore. Mathematics of kinetic theory, 2012. Lecture notes, <https://terpconnect.umd.edu/~lvrmr/2012-2013-F/Classes/AMSC698/NOTES/Lec06.pdf>.
- [Lio94a] P. L. Lions. Compactness in Boltzmann’s equation via Fourier integral operators and applications. I, II, III. *J. Math. Kyoto Univ.*, 34(2) :391–428, 429–462, 539–584, 1994.
- [Lio94b] P. L. Lions. Conditions at infinity for Boltzmann’s equation. *Commun. Partial Differ. Equations*, 19(1-2) :335–367, 1994.
- [LLSvB80] O. E. III Lanford, J. L. Lebowitz, H. Spohn, and H. van Beijeren. Equilibrium time correlation functions in the low-density limit. *J. Stat. Phys.*, 22 :237–257, 1980.
- [LP81] E. Lifshitz and L. Pitaevskii. *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1981.
- [Max03] JC Maxwell. On the dynamical theory of gases, in the kinetic theory of gases : An anthology of classic papers with historical commentary, sg brush, editor, 2003.

- [Mis00] Stéphane Mischler. On the initial boundary value problem for the Vlasov-Poisson-Boltzmann system. *Commun. Math. Phys.*, 210(2) :447–466, 2000.
- [Mis10] Stéphane Mischler. Kinetic equations with Maxwell boundary conditions. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(5) :719–760, 2010.
- [Mou06a] C. Mouhot. Explicit coercivity estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators. *Communications in Partial Differential Equations*, 31(9) :1321–1348, 2006.
- [Mou06b] Clément Mouhot. Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials. *Commun. Math. Phys.*, 261(3) :629–672, 2006.
- [Mou10] C. Mouhot. Enlarging the functional space of decay estimates on semigroups. In *Progress in analysis and its applications. Proceedings of the 7th international ISAAC congress held at the Imperial College London, London, UK, July 13–18, 2009.*, pages 505–511. Hackensack, NJ : World Scientific, 2010.
- [MS07] C. Mouhot and R. Strain. Spectral gap and coercivity estimates for linearized Boltzmann collision operators without angular cutoff. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 87(5) :515–535, 2007.
- [MS19] Jens Marklof and Andreas Strömbergsson. Kinetic theory for the low-density lorentz gas. *arXiv preprint arXiv :1910.04982*, 2019.
- [Nav23] CLMH Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6(1823) :389–440, 1823.
- [NVW21a] A. Nota, J. Velazquez, and R. Winter. Interacting particle systems with long range interactions : approximation by tagged particles in random fields. *arXiv :2103.09740 [math-ph]*, 2021.
- [NVW21b] A. Nota, J. Velazquez, and R. Winter. Interacting particle systems with long-range interactions : scaling limits and kinetic equations. *Rendiconti Lincei*, 32(2) :335–377, 2021.
- [Pen63] Oliver Penrose. Convergence of fugacity expansions for fluids and lattice gases. *Journal of Mathematical Physics*, 4(10) :1312–1320, 1963.
- [PS15] M. Pulvirenti and S. Simonella. On the evolution of the empirical measure for the hard-sphere dynamics. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, 10(2) :171–204, 2015.
- [PS16] M. Pulvirenti and S. Simonella. Propagation of chaos and effective equations in kinetic theory : a brief survey. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 4(3) :255–274, 2016.
- [PS17] M. Pulvirenti and S. Simonella. The Boltzmann-Grad limit of a hard sphere system : analysis of the correlation error. *Invent. Math.*, 207(3) :1135–1237, 2017.
- [PS21] Mario Pulvirenti and Sergio Simonella. A brief introduction to the scaling limits and effective equations in kinetic theory. *Trails in Kinetic Theory : Foundational Aspects and Numerical Methods*, pages 183–208, 2021.
- [PSS14] M. Pulvirenti, C. Saffirio, and S. Simonella. On the validity of the Boltzmann equation for short range potentials. *Rev. Math. Phys.*, 26(2) :1450001, 64, 2014.
- [Ser21] Denis Serre. Hard spheres dynamics : weak vs strong collisions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 240(1) :243–264, 2021.

- [Sin72] Ya. G. Sinai. Construction of dynamics in one-dimensional systems of statistical mechanics. *Theoretical and Mathematical Physics*, 11 :487 – 494, 1972.
- [Son07] Yoshio Sone. *Molecular gas dynamics. Theory, techniques, and applications*. Model. Simul. Sci. Eng. Technol. Boston, MA : Birkhäuser, 2007.
- [Spo78] Herbert Spohn. The Lorentz process converges to a random flight process. *Commun. Math. Phys.*, 60 :277–290, 1978.
- [Spo80] H. Spohn. Kinetic equations from Hamiltonian dynamics : Markovian limits. *Rev. Modern Phys.*, 52(3) :569–615, 1980.
- [Spo81] Herbert Spohn. Fluctuations around the Boltzmann equation. *J. Statist. Phys.*, 26(2) :285–305, 1981.
- [Spo83] Herbert Spohn. Fluctuation theory for the boltzmann equation. *Nonequilibrium Phenomena I : The Boltzmann Equation*, pages 225–251, 1983.
- [Spo91] Herbert Spohn. *Large scale dynamics of interacting particles*. Texts Monogr. Phys. Berlin etc. : Springer-Verlag, 1991.
- [SR09] Laure Saint-Raymond. *Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation*, volume 1971 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [Sto45] George Gabriel Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *ransactions of the Cambridge Philosophical Society*, IX :287–305, 1845.
- [Uka74] Seiji Ukai. On the existence of global solutions of mixed problem for nonlinear Boltzmann equation. *Proc. Japan Acad.*, 50 :179–184, 1974.
- [Uka76] Seiji Ukai. Les solutions globales de l'équation de Boltzmann dans l'espace tout entier et dans le demi-espace. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, 282 :317–320, 1976.
- [Vas79] L. N. Vaserstein. On systems of particles with finite-range and/or repulsive interactions. *Communications in Mathematical Physics*, 69(1) :31–56, October 1979.
- [Vil08] Cédric Villani. Entropy production and convergence to equilibrium. In *Entropy methods for the Boltzmann equation. Lectures from a special semester at the Centre Émil Borel, Institut H. Poincaré, Paris 2001.*, pages 1–70. Berlin : Springer, 2008.
- [Win21] R. Winter. Convergence to the Landau equation from the truncated BBGKY hierarchy in the weak-coupling limit. *Journal of Differential Equations*, 283 :1–36, 2021.
- [Yvo35] Jacques Yvon. *La théorie statistique des fluides et l'équation d'état*, volume 203. Hermann & cie, 1935.

Résumé :

La thèse est consacrée à l'étude des équations aux dérivées partielles cinétiques décrivant les collisions dans un gaz ou un plasma de faible densité. Plus précisément, nous étudions la validation mathématique de l'équation de Boltzmann et de sa variante diffusive, l'équation Landau. Ces équations décrivent asymptotiquement des systèmes de particules évoluant selon les principes fondamentaux de la physique (les lois de Newton), dans un régime où le nombre de particules tend vers l'infini. Nous nous intéressons en particulier à des systèmes déterministes, dans lesquels la distribution initiale des particules est la principale source de stochasticité.

La première partie est dédiée à l'étude du gaz de sphères dures dans un domaine à bord. Les réflexions des particules au bord sont modélisées par des conditions au bord stochastiques : les particules conservent leurs énergies cinétiques, mais repartent dans une direction aléatoire. Pour ce modèle, nous avons dérivé l'équation de Boltzmann hors équilibre, mais seulement pour des temps courts (du même ordre de grandeur que dans le cas d'un domaine sans bord).

La seconde partie est consacrée à la dérivation de l'équation de Landau linéarisée, projet que nous n'avons que partiellement abordé. Nous avons divisé le problème en deux étapes. Dans un second temps, nous dérivons dans la limite de collisions rasantes l'équation de Landau linéarisée à partir de l'équation de Boltzmann décrivant des potentiels d'interaction physiques. La première étape est la dérivation de l'équation de Boltzmann linéarisée pour les corrélations temporelles, dans la limite de Boltzmann-Grad. Pour cette dernière tâche, nous nous restreignons au système des sphères dures. Notre preuve n'utilise pas la théorie des billards (contrairement à la littérature précédente) et est potentiellement extensible à différents modèles d'interaction.

Mots Clefs : Théorie cinétique collisionnelle, Équation de Boltzmann, Équation de Landau, Dynamique des sphères dures, Conditions de bord stochastique, Limite de Boltzmann-Grad, Limite des collisions rasantes, Fluctuations autour de l'équilibre.

Abstract:

The thesis is devoted to the study of kinetic partial differential equations describing collisions in a low density gas or plasma. More precisely, we study the mathematical validity of the Boltzmann equation and its diffusive variant, the Landau equation. These equations provide an asymptotic description of systems of particles evolving according to the fundamental principles of physics (Newton's laws), in a regime where the number of particles tends towards infinity. We are particularly interested in deterministic dynamics, in which the initial particle distribution is the main source of stochasticity.

The first part is dedicated to the study of the hard sphere gas in a domain with boundaries. The particles are reflected at the boundary according to stochastic conditions: the particles conserve their kinetic energy, but are reinjected in a random direction. For this model, we have derived the non-equilibrium Boltzmann equation, but only for short times (same order of magnitude of the case without boundary).

The second part is devoted to the derivation of the linearized Landau equation, a project that we have only partially tackled. We have divided the problem into two stages. Secondly, in the limit of grazing collisions, we derive the linearized Landau equation from the Boltzmann equation describing physical interaction potentials. The first step is the derivation of the linearized Boltzmann equation for time-correlations, in the Boltzmann-Grad limit. For this last task, we restrict ourselves to the system of hard spheres. Our proof does not use the billiard theory (unlike previous literature) and is potentially extensible to different interaction models.

Keywords: Collisional kinetic theory, Boltzmann equation, Landau equation, hard sphere dynamics, stochastic boundary conditions, Boltzmann-Grad, grazing collision limit, fluctuation theory.