Titulaire : Mitia Duerinckx
Assistant : Corentin Le Bihan

Correction d'Intégration-mesure - 2025/2026

Séance 7 – Théorème d'extension de mesure

Exercice 1. 1. On définit $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tel que pour toute partie $B \subset X$,

$$\mu(B) = \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu_0(A_i) \text{ où } B \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i,\ (A_i)_i \text{ famille d'éléments de } \mathcal{S} \right\}.$$

On va montrer que μ est une mesure extèrieur qui correspond à μ_0. On doit montrer les points suivants

(a) On a $\mu(\emptyset) = 0$,
c'est directe car $\emptyset \in \mathcal{S}$.

(b) pour tout $(A_i)_i \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$, on a $\mu(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$,
Soit $(A_i)_{i\geq 1} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}$, $\varepsilon > 0$. Pour chaque A_i, il existe une famille $(B_i^j)_j$ dénombrable tel que

$$A_i \subset \bigcup_{j\geq 1} B_i^j,\ \sum_j \mu_0(B_i^j) \leq \frac{\varepsilon}{2^i} + \mu(A_i).$$

Alors $\bigcup_i A_i$ est dans l'union des B_i^j, et

$$\mu(\bigcup_i A_i) \leq \sum_{i,j\geq 1} \mu_0(B_i^j) \leq \sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1} \mu_0(B_i^j) \leq \sum_{i\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^i} + \mu_0(A_i) \leq \varepsilon + \sum_{i\geq 1} \mu_0(A_i).$$

On prend $\varepsilon \to 0$, ce qui donne le résultat atendu.

(c) pour tout $B \in \mathcal{S}$, $C \in \mathcal{P}(X)$, $\mu(C) = \mu(C \setminus B) + \mu(C \cap B)$.
Soit $(A_i)_i \in \mathcal{S}^N$ telle que

$$C \subset \bigcup_i A_i, \sum_i \mu_0(A_i) \leq \mu(C) + \varepsilon.$$

Alors $A_i \cap B \in \mathcal{S}$, pour tout i il existe une famille finie de $\mathcal{S}$ avec des élément deux à deux disjoints tel que $A_i \setminus B = \bigsqcup_j A_i^j$. Alors, comme $(A_i \cap B)$ recouvre $C \cap B$ et que (A_i^j) recouvre $C \setminus B$,

$$\mu(C \cap B) + \mu(C \setminus B) \leq \sum_i \mu_0(A_i \cap B) + \sum_{i,j} \mu_0(A_i^j) \leq \sum_i \mu_0(A_i) \leq \mu(C) + \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon \to 0$, on a

$$\mu(C \cap B) + \mu(C \setminus B) \leq \mu(C).$$

L'inégalité inverse vient du point (b).

(d) pour tout $B \in \mathcal{S}$, $\mu(B) = \mu_0(B)$.
Pour $\varepsilon > 0$, considérons $(A_i)_{i\geq 1} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$B \subset \bigcup_{i\geq 1} A_i, \ \sum_{i\geq 1} \mu_0(A_i) \leq \mu(B) + \varepsilon.$$

Comme $(A_i \cap B)$ est aussi un recouvrement de B, on peut supposer que $A_i \subset B$. Chaque ensemble $A_i \cap A_1^c \cdots \cap A_{i-1}^c$ peut se décomposer par une partition fini $(C_i^j)_{j\leq n_j}$ d'éléments de $\mathcal{S}$. Ainsi, les $(C_i^j)_{i,j}$ sont deux à deux disjoints et

$$\bigcup_{i,j} C_i^j = \bigcup A_i = B.$$

On déduit que

$$\mu_0(B) = \sum_{i,j} \mu_0(C_i^j) \leq \sum_i \mu_0(A_i) \leq \mu(B) + \varepsilon.$$

On obtient $\mu_0(B) \leq \mu(B)$ l'autre inégalité est directe.

2. Pour montrer que $\mathcal{S}$ est un semi-anneau, il suffit de faire un dessin.
Montrons que μ_0 est une prémesure. Premièrement, $\mu_0(\emptyset) = 0$.
Soit $(A_i)_i$ une partition de $[0,1[^d$ par des éléments de $\mathcal{S}$. Si il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sum_{i\geq 0} \mu_0(A_i) < 1 - \varepsilon,$$

alors pour tout $N > 0$,

$$\sum_{i=0}^{N} \mu_0(A_i) < 1 - \varepsilon,$$

et on déduit que $[0, 1 - \frac{\varepsilon}{2d}]^d \setminus \bigcup_{i=1}^N \overset{\circ}{A}_i$ est non vide (car de volume non nul). C'est un ensemble fermé donc compact. Ainsi, $[0, 1 - \frac{\varepsilon}{2d}]^d \setminus \bigcup_{i=1}^\infty \overset{\circ}{A}_i$ est une intersection de compact non-vide, et est donc non vide.

C'esen contradiction avec le faite que $\bigcup_{i=1}^\infty \overset{\circ}{A}_i = [0,1[^d$.

Exercice 2. 1. Pour $\varepsilon > \varepsilon' > 0$, et $A \subset X$, $\mathcal{R}_{\varepsilon'}(A) \subset \mathcal{R}_\varepsilon(A)$. Ainsi, $\mu_\alpha^\varepsilon(A) \leq \mu_\alpha^\varepsilon(A)$.

2. La famille vide est un recouvrement de l'ensemble vide, donc $\mu_\alpha^\varepsilon(\emptyset) = 0$.
Soit $(A_i) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ et $\eta > 0$. On considère $(B_i^j)_j \in \mathcal{R}_\varepsilon(A_i)$ tel que

$$\sum_j (\mathrm{diam}(B_i^j))^\alpha \leq \frac{\eta}{2^j} + \mu_\alpha^\varepsilon(A_i).$$

Alors $(B_i^j)_{i,j} \in \mathcal{R}_\varepsilon(\bigcup_i A_i)$, et

$$\mu_\varepsilon^\alpha(\bigcup_i A_i) \leq \sum_{i,j} (\mathrm{diam}(B_i^j))^\alpha \leq 2\eta + \sum_i \mu_\varepsilon^\alpha(A_i).$$

On a la sous-additivité en prenant $\eta \to 0$.

3. Soit $(A_i) \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$. Par théorème de croissance monotone

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_i \mu^\alpha_\varepsilon(A_i) = \sum_i \mu^\alpha(A_i).$$

On déduit que

$$\mu^\alpha(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mu^\alpha(A_i).$$

4. Montrons que $\alpha \mapsto \mu^\alpha(A)$ est décroissante pour $\varepsilon < 1$: pour $0 < \alpha < \alpha'$ et $\eta > 0$, considérons $(B_i)_i \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)$ tel que

$$\sum_i (\mathrm{diam}(B_i))^\alpha \leq \eta + \mu^\varepsilon_\alpha(A).$$

Alors, comme tout les diamètres sont plus petits que 1,

$$\mu^{\alpha'}_\varepsilon(A) \leq \sum_i (\mathrm{diam}(B_i))^{\alpha'} \leq \sum_i (\mathrm{diam}(B_i))^\alpha \leq \eta + \mu^\varepsilon_\alpha(A).$$

On conclut en prenant $\eta, \varepsilon \to 0$.
On montre maintenant que $\alpha \mapsto \varepsilon^{-\alpha}\mu^\alpha_\varepsilon(A)$:

$$\varepsilon^{-\alpha'}\mu^{\alpha'}_\varepsilon(A) \leq \sum_i \left(\tfrac{\mathrm{diam}(B_i)}{\varepsilon}\right)^{\alpha'} \leq \sum_i \left(\tfrac{\mathrm{diam}(B_i)}{\varepsilon}\right)^{\alpha} \leq \varepsilon^{-\alpha}\eta + \varepsilon^{-\alpha}\mu^\varepsilon_\alpha(A).$$

On conclue en prenant la limite $\eta \to 0$.

5. Supposons que $\mu^\alpha(A) > 0$. Alors pour $\alpha' < \alpha$,

$$\mu^{\alpha'}_\varepsilon(A) \geq \varepsilon^{\alpha-\alpha'}\mu^\alpha_\varepsilon(A).$$

En prenant la limite $\varepsilon \to 0$, on a que $\mu^{\alpha'}(A) = \infty$.
De même, pour $\mu^\alpha(A) < \infty$, on a $\mu^{\alpha'}(A) = \infty$ pour tout $\alpha' > \alpha$.

6. Pour traiter la dernière question, on utilise que $C = (\frac{1}{3}C) \sqcup (\frac{1}{3}C + \frac{3}{3})$.
Pour $\varepsilon < \frac{1}{3}$, $\eta > 0$, on considère $(A_i) \in \mathcal{R}_\varepsilon(C)$ tel que

$$\sum_i (\mathrm{diam}(A_i))^\alpha \leq \mu^\alpha_\varepsilon(C) + \eta.$$

En utilisant la décomposition de C, la famille $(\frac{1}{3}A_i)_i \sqcup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}A_i)_i$ est dans $\mathcal{R}_{\varepsilon/3}(C)$,

$$\mu^\alpha_{\varepsilon/3}(C) \leq \sum_i (\mathrm{diam}(\tfrac{1}{3}A_i))^\alpha + (\mathrm{diam}(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}A_i))^\alpha \leq \tfrac{2}{3^\alpha}\mu^\alpha_\varepsilon(C) + \tfrac{2}{3^\alpha}\eta.$$

En prenant $\eta \to 0$, on a $\mu^\alpha_{\varepsilon/3}(C) \leq \frac{2}{3^\alpha}\mu^\alpha_\varepsilon(C)$.
Montrons l'inégalité inverse. On définit I_0, I_1 comme

$$I_a = \left\{ i | A_i \subset \left(\tfrac{2a}{3} + \tfrac{1}{3}C\right) \right\}.$$

Comme $\varepsilon < \frac{1}{3}$, les ensembles I_0 et I_1 sont disjoints. Supposons (sans perdre en généralité) que

$$\sum_{i \in I_0} (\mathrm{diam}(A_i))^\alpha \leq \sum_{i \in I_1} (\mathrm{diam}(A_i))^\alpha.$$

Alors $(3A_i)_{i\in I_0}$ et $(A_i)_{i\in I_0} \sqcup (\frac{2}{3}+A_i)_{i\in I_0}$ sont aussi un recouvrement de C. Ainsi

$$\begin{aligned}\mu^\alpha_{3\varepsilon}(C) \leq \sum_{i\in I_0}(\mathrm{diam}(3A_i))^\alpha &\leq \tfrac{3^\alpha}{2}\sum_{i\in I_0}(\mathrm{diam}(A_i))^\alpha + (\mathrm{diam}(\tfrac{2}{3}A_i))^\alpha \\ &\leq \tfrac{3^\alpha}{2}\sum_{i}(\mathrm{diam}(A_i))^\alpha \\ &\leq \tfrac{3^\alpha}{2}\mu^\alpha_\varepsilon(C) + \tfrac{3^\alpha}{2}\eta.\end{aligned}$$

En prenant la limite $\eta \to 0$, $\mu^\alpha_{3\varepsilon}(C) \leq \frac{3^\alpha}{2}\mu^\alpha_\varepsilon(C)$.
On en déduit que $\mu^\alpha_{\varepsilon/3^n}(C) = (\frac{2}{3^\alpha})^n\mu^\alpha_\varepsilon(C)$. Ainsi, en prenant $n \to \infty$, $\mathcal{H}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$, et $\mu^{\mathcal{H}(C)}(C) \in]0,\infty[$.