

Titulaire : Mitia Duerinckx
 Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices de Théorie de la mesure - 2025/2026

Séance 9 – Différents modes de convergence

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable. On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de fonctions mesurables converge

— *en mesure* vers f si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X ; |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0$$

pour tout $\epsilon > 0$;

— *presque uniformément* vers f si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $X_\epsilon \subset X$ tel que

$$\mu(X \setminus X_\epsilon) < \epsilon \text{ et } f_n \rightarrow f \text{ uniformément sur } X_\epsilon ;$$

— *dans L^p* vers f , où $1 \leq p \leq \infty$, si $f \in L^p$, $f_n \in L^p$ pour tout n et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu = 0 ;$$

— *presque partout* vers f s'il existe un ensemble $N \subset X$ de mesure nulle tel que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in X \setminus N$.

Justifier les énoncés suivants.

- (i) La convergence presque partout n'implique pas la convergence dans L^p , sauf si la suite $(f_n)_n$ est bornée par une fonction $g \in L^p$ et $p < \infty$.
- (ii) La convergence dans L^p implique la convergence en mesure.
- (iii) La convergence en mesure n'implique pas la convergence presque partout, mais seulement la convergence presque partout d'une sous-suite.
- (iv) La convergence presque partout n'implique pas la convergence en mesure, sauf si $\mu(X) < \infty$.
- (v) La convergence en mesure n'implique pas la convergence dans L^p , sauf si la suite (f_n) est bornée par une fonction $g \in L^p$.
- (vi) La convergence presque partout n'implique pas la convergence presque uniforme.
- (vii) Si $\mu(X) < \infty$, la convergence presque partout et la convergence presque uniforme sont équivalentes (*théorème d'Egorov*).

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure avec $\mu(X) < \infty$, et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables $X \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de X . Montrer que la suite (u_n) converge vers $l \in X$ si et seulement si toute sous-suite de (u_n) possède une sous-suite qui converge vers l .
- (ii) En combinant les points (iii) et (iv) de l'exercice précédent, montrer que $(f_n)_n$ converge en mesure vers f si et seulement si toute sous-suite de $(f_n)_n$ possède une sous-suite qui converge presque partout vers f .
- (iii) En déduire qu'il n'existe pas de topologie pour la convergence presque partout : plus précisément, il n'existe pas de topologie sur l'espace des fonctions mesurables $X \rightarrow \mathbb{R}$ de telle sorte qu'une suite de telles fonctions converge pour cette topologie si et seulement si elle converge presque partout.

Exercice 3 (Généralisation de la convergence dominée). Soient f_n, f, g_n, g des fonctions mesurables $X \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f_n \rightarrow f$ p.p., que $|f_n| \leq g_n$ p.p. pour tout n , et que $g_n \rightarrow g$ dans L^1 . Montrer qu'alors on a aussi $f_n \rightarrow f$ dans L^1 .

Exercice 4 (Théorème de Vitali). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables $X \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_n$ est équi-intégrable si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\mu(E) < \delta$ implique $\int_E |f_n| d\mu < \epsilon$ pour tout n . On dit que $(f_n)_n$ est tendue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $F \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(F) < \infty$ et $\int_{F^c} |f_n| d\mu < \epsilon$ pour tout n .

- (i) Montrer qu'une suite $(f_n)_n$ converge en L^1 si et seulement si $(f_n)_n$ converge en mesure et est équi-intégrable et tendue (*théorème de Vitali*).
(Aide : songer à utiliser le théorème d'Egorov.)
- (ii) Montrer que $(f_n)_n$ est tendue et équi-intégrable dès que $\mu(X) < \infty$ et $\sup_n \int_X |f_n|^p d\mu < \infty$ pour un $p > 1$.
- (iii) Déduire que si $\mu(X) < \infty$ et si une suite $(f_n)_n$ de fonctions mesurables converge en mesure vers f et satisfait $\sup_n \int_X |f_n|^p d\mu < \infty$, alors on a $f_n \rightarrow f$ en L^q pour tout $1 \leq q < p$.