Titulaire : Mitia Duerinckx
Assistant : Corentin Le Bihan

**Exercices de Théorie de la mesure - 2025/2026**

*Séance 8 – Théorème de Fubini*

**Exercice 1.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive et Lebesgue-mesurable. On pose

$$A(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < f(x)\}.$$

(i) Montrer que $A(f)$ est Lebesgue-mesurable dans $\mathbb{R}^2$ et que l'intégrale de $f$ sur $\mathbb{R}$ coïncide avec la mesure de $A(f)$ dans $\mathbb{R}^2$. (*Aide :* utiliser une suite de fonctions simples tendant vers $f$.)

(ii) Montrer que le graphe de $f$,

$$G(f) = \{(x, f(x)) \, ; \, x \in \mathbb{R}\},$$

est Lebesgue-mesurable dans $\mathbb{R}^2$.

(iii) Vérifier que $\mathbb{1}_{G(f)}(x, y) = \mathbb{1}_{\{f(x)\}}(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. En déduire que $G(f)$ est de mesure nulle.

(iv) Vérifier que $\mathbb{1}_{A(f)}(x, y) = \mathbb{1}_{(0,f(x))}(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. En déduire la mesure de $A(f)$.

(v) Vérifier que $\mathbb{1}_{A(f)}(x, y) = \mathbb{1}_{(y,\infty)}(f(x))$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. En déduire le principe de Cavalieri : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive et Lebesgue-mesurable,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^+} m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > y\}) \, \mathrm{d}y.$$

**Exercice 2.** On considère l'espace de mesure $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mu)$, avec $\mu = \mathcal{L} \times \sharp$ où $\mathcal{L}$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et où $\sharp$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$, et on considère la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Comparer les intégrales itérées

$$\int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} 1_\Delta \, d\lambda \right) d\sharp \qquad \text{et} \qquad \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} 1_\Delta \, d\sharp \right) d\lambda.$$

Ceci contredit-il le théorème de Fubini ?

**Exercice 3.** Soit $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. Montrer que $f$ est Lebesgue-mesurable sur $\mathbb{R}^2$ et comparer les int'egrales itérées

$$\int_{[0,1]} \left( \int_{[1,\infty)} f(x, y) dy \right) dx \qquad \text{et} \qquad \int_{[1,\infty)} \left( \int_{[0,1]} f(x, y) dx \right) dy.$$

Ceci contredit-il le théorème de Fubini ?

**Exercice 4.** Soit $f : (-1,1) \times (-1,1) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } x^2 \neq y^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifier que $f$ est Lebesgue-mesurable sur $(-1,1)^2$ et comparer les intégrales suivantes,

$$\int_{(-1,1)} \left( \int_{(-1,1)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad \int_{(-1,1)} \left( \int_{(-1,1)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

La fonction $f$ est-elle intégrable sur $(-1,1)^2$ ?

**Exercice 5.** Soient $[a,b] \subset [0,1)$ et $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, de support inclus dans $(a,b)$, telle que $\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

(i) Etant donné $\epsilon > 0$, construire une fonction continue $G : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}_+$, de support inclus dans $(0,1) \times (a,b)$, telle que

$$G(\tfrac{1}{2}, y) = g(y) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \int_0^1 G(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \epsilon.$$

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons une fonction continue $g_n : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\operatorname{supp} g_n \subset (\delta_n, \delta_{n+1}) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 g_n(y)\,\mathrm{d}y = 1,$$

avec $(\delta_m)_{m\geq 1}$ une suite strictement croissante de réels telle que $\delta_1 = 0$ et $\lim_m \delta_m = 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit $G_n$ la fonction correspondant à $g_n$ via la construction de la question (i) avec $\epsilon = \frac{1}{2^n}$. Montrer que la fonction $H : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x,y)$$

est bien définie, continue, positive sur $(0,1) \times (0,1)$, et vérifie

$$\iint_{(0,1)\times(0,1)} H(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 H(\tfrac{1}{2}, y)\,\mathrm{d}y = \infty.$$

(iii) Ceci contredit-il le théorème de Fubini ?

**Exercice 6.**

(i) En remarquant que $\frac{\sin(x)}{x} = \int_0^1 \cos(xy)\,\mathrm{d}y$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$, calculer $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-tx}\,\mathrm{d}x$ pour tout $t \in \mathbb{R}_0^+$.

**Exercice 7.** Soient $\mu$ et $\nu$ deux mesures $\sigma$-finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

1. Montrer que l'ensemble $D := \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.
2. Montrer qu'on a
$$(\mu \times \nu)(\Delta) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}),$$
où $\Delta := \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 8.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathcal{L}(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = 0.$$

**Exercice 9.** Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$

(i) Soit $S^{n-1}$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\varphi : x \mapsto (|x|, \frac{x}{|x|})$ est une bijection entre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $(0, \infty) \times S^{n-1}$.

(ii) Soit $\mathcal{L}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'on peut définir une mesure $\sigma$ sur $S^{n-1}$ de la manière suivante : si $A \subseteq S^{n-1}$ est un borélien, on pose $\tilde{A} = \varphi^{-1}(]0, 1[\times A)$ et ensuite $\sigma(A) = n\mathcal{L}(\tilde{A})$.

(iii) Pour $f$ une fonction borélienne positive, on souhaite montrer la formule usuelle

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} r^{n-1} \left( \int_{S^{n-1}} f(ru)\,\sigma(\mathrm{d}u) \right) \mathrm{d}r$$

en procédant de la façon suivante :

— montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{S}_N = \{\varphi^{-1}(]a, b] \times A)\,;\, 0 \leq a \leq b \leq N \text{ et } A \in \mathcal{B}(S^{n-1})\}$$

est stable par intersection finie ;

— vérifier la formule pour $f = \mathbb{1}_E$, avec $E \in \mathcal{S}_N$ ;

— en déduire que la formule est vraie pour $f = \mathbb{1}_B$ avec $B$ borélien de $\mathbb{R}^n$.

— généraliser à $f$ fonction simple positive et borélienne, puis à $f$ fonction borélienne positive.

(iv) Montrer que la fonction $f : x \mapsto (1 + |x|^2)^{-m/2}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si la fonction $g : x \mapsto (1 + |x|)^{-m}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $m > n$.