

Titulaire : Mitia Duerinckx
 Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices de Théorie de la mesure - 2025/2026

Séance 7 – Théorèmes d'extension de mesures

Exercice 1. Le but de cette exercice est d'explorer une version plus générale du résultat d'extension développé en cours pour la construction de la mesure de Lebesgue.

Pour X est un ensemble non vide, un semi-anneau $\mathcal{S}$ sur X est une famille de sous-ensembles de X satisfaisant :

- $\emptyset \in \mathcal{S}$
- $A, B \in \mathcal{S} \implies A \cap B \in \mathcal{S}$
- $A, B \in \mathcal{S} \implies \exists n \geq 1$ et $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{S}$ disjoints tels que $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n K_i$.

Une pré-mesure μ_0 sur $\mathcal{S}$ est une application $\mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ telle que

- $\mu_0(\emptyset) = 0$
- $\mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_n \subset \mathcal{S}$ avec $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$ et $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour tous $n \neq m$.

(1) Soient X un ensemble non vide, $\mathcal{S}$ un semi-anneau sur X , et μ_0 une pré-mesure sur $\mathcal{S}$. Montrer le théorème d'extension de Carathéodory :

- Il existe une mesure sur $\sigma(\mathcal{S})$ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est égale à μ_0 .
 (Aide : En s'inspirant de la construction de la mesure de Lebesgue, construire une mesure extérieure qui étende la pré-mesure.)
- Cette extension est unique si μ_0 est σ -finie.

(2) Montrer que $\mathcal{S} = \{\prod_{k=1}^d [a_k, b_k) : a_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq b_d\}$ est un semi-anneau sur $\mathbb{R}^d$, et vérifier que la mesure de Lebesgue peut être retrouvée comme un cas particulier du résultat général ci-dessus.

(3) Sur $\mathbb{R}$, on considère le semi-anneau $\mathcal{S} = \{[a, b) : a \leq b\}$ et la pré-mesure μ_0 définie par $\mu_0(A) = \infty$ pour $A \neq \emptyset$. Quelle est l'extension de Carathéodory de cette pré-mesure ? Est-elle unique ? Ceci contredit-il le résultat de (1) ?

(Aide : pour l'unicité, comparer à la mesure de comptage.)

(4) Sur $\mathbb{R}$, on considère le semi-anneau $\mathcal{S} = \{[a, b) : a \leq b\}$. Montrer que $\mu_0 : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ est une pré-mesure avec $\mu_0([a, b)) < \infty$ pour tous $a < b$ si et seulement s'il existe une fonction croissante $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\mu_0([a, b)) = F(b) - F(a)$ pour $a \leq b$. L'extension de Carathéodory d'une telle pré-mesure est appelée la mesure de Lebesgue-Stieltjes μ_F , et on note l'intégrale correspondante $\int \varphi d\mu_F = \int \varphi dF$.

- (5) Soit $X : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une variable aléatoire sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Montrer $\mu_{F_X} = \mathbb{P}_X$, où μ_{F_X} est la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à

$$F_X(t) := \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq t\}).$$

Déduire que pour toute fonction h borélienne positive on peut écrire

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int (h \circ X) d\mathbb{P} = \int h d\mathbb{P}_X = \int h dF_X.$$

Montrer que pour $F_X \in C^1(\mathbb{R})$, on a pour toute fonction h borélienne positive

$$\int h dF_X = \int h(t) F'_X(t) dt.$$

La fonction F_X est appelé la fonction de répartition.

Exercice 2 (Mesure de Hausdorff). Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout $\alpha, \varepsilon > 0$, et pour toute partie A de X , on désigne par $\mathcal{R}_\varepsilon(A)$ l'ensemble des recouvrements dénombrables $(B_k)_{k \geq 1}$ de A par des boules B_k de diamètre inférieur à ε , et on pose

$$\mu_\alpha^\varepsilon(A) := \inf_{(B_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{R}_\varepsilon(A)} \sum_{k \geq 1} (\text{diam} B_k)^\alpha.$$

1. Montrer que la fonction $\varepsilon \mapsto \mu_\alpha^\varepsilon(A)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que l'application μ_α^ε est une mesure extérieure.
3. En déduire que l'application $\mu_\alpha := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\alpha^\varepsilon$ est une mesure extérieure.
On appelle μ_α la *mesure de Hausdorff*.
4. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, les fonctions $\alpha \mapsto \mu_\alpha(A)$ et $\alpha \mapsto \varepsilon^{-\alpha} \mu_\alpha^\varepsilon(A)$, où $\varepsilon > 0$, sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

On définit la *dimension de Hausdorff* d'une partie A de X par

$$\mathcal{H}(A) := \inf \{ \alpha > 0 \mid \mu_\alpha(A) = 0 \}.$$

- (5) Montrer que pour tout $\alpha > \mathcal{H}(A)$, $\mu_\alpha(A) = 0$ et que, pour tout $\alpha < \mathcal{H}(A)$, $\mu_\alpha(A) = +\infty$.
- (6) Calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor construit au TP précédent.

Indications : Pour obtenir une borne supérieure sur la dimension, utiliser que C est recouvert par chaque C_n .