

Titulaire : Mitia Duerinckx
 Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices de Théorie de la mesure - 2025/2026

Séance 6 – Ensembles pathologiques

Exercice 1. Le but de cet exercice est de montrer que, si l'on admet l'axiome du choix,¹ on peut construire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas Lebesgue-mesurable. Cette construction est due à Vitali (1905).

- (i) Montrer que la relation $\sim$ définie sur $[0, 1[$ par

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x - y \in \mathbb{Q}$$

est une relation d'équivalence.

- (ii) On considère le quotient $\mathcal{F} := [0, 1)/\sim$, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence. Définissons F comme un sous-ensemble de $[0, 1)$ obtenu en choisissant exactement un élément dans chaque classe. Montrer que

$$[0, 1) \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (F + q) \subseteq [-1, 2].$$

- (iii) Montrer que si q_1 et q_2 sont deux éléments distincts de $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, les ensembles $F + q_1$ et $F + q_2$ sont disjoints.
- (iv) En supposant que F est Lebesgue-mesurable, montrer qu'on aboutit à une contradiction.

Exercice 2. En préparation à l'exercice suivant, montrer le théorème de Steinhaus : *si $E \subset \mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable et de mesure non nulle, alors l'ensemble $E - E := \{x - y : x, y \in E\}$ contient un voisinage de l'origine.*

Aide : Utiliser la régularité de la mesure de Lebesgue pour trouver un compact K et un ouvert U tels que $K \subset E \subset U$ et $\lambda(U) < 2\lambda(K)$. Considérer alors $\varepsilon := d(K, U^c) > 0$ et utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue pour montrer que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset K - K$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de raffiner la construction de Vitali de l'exercice 1 : on va construire un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ tel que tout ensemble Lebesgue-mesurable inclus dans E ou E^c est de mesure nulle. Est-ce qu'un tel ensemble peut être lui-même Lebesgue-mesurable ? Montrer que ceci implique que tout ensemble $B \subset \mathbb{R}$ avec mesure de Lebesgue extérieure non nulle contient un ensemble qui n'est pas Lebesgue-mesurable.

Pour la construction de E , on procède comme suit.

1. En fait, il a été montré par Solovay (1964) que l'on ne peut pas montrer l'existence d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non Lebesgue-mesurable sans supposer l'axiome du choix. Plus précisément, il existe un modèle dans lequel la théorie des ensembles usuelle de Zermelo–Frankel est vraie et où tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ sont Lebesgue-mesurables.

(i) On définit

$$G_0 := \{r + 2n\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\}, \quad G_1 := \{r + (2n+1)\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\},$$

et $G := G_0 \cup G_1 = \{r + n\sqrt{2} : r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que G et G_0 sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$, que $G_0 \cap G_1 = \emptyset$, et que $G_1 = \sqrt{2} + G_0$.

(ii) Montrer que la relation $\sim$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x - y \in G$$

est une relation d'équivalence.

(iii) On considère le quotient $\mathcal{A} = \mathbb{R} / \sim$. Définissons A comme un sous-ensemble de $[0, 1]$ obtenu en choisissant exactement un élément dans chaque classe, et soit $E := A + G_0$. Montrer que tout sous-ensemble Lebesgue-mesurable de E est de mesure nulle.

Aide : Soit $B \subset E$ Lebesgue-mesurable avec $\mathcal{L}(B) > 0$. Utiliser le théorème de Steinhaus (exercice précédent) pour trouver $\epsilon > 0$ tel que $(-\epsilon, \epsilon) \subset E - E$. Par la densité de G_1 dans $\mathbb{R}$, montrer que ceci mène à une contradiction.

(iv) Montrer que $E^c = A + G_1 = \sqrt{2} + E$, et déduire que tout sous-ensemble Lebesgue-mesurable $B \subset E^c$ est aussi de mesure nulle.

Exercice 4. En préparation à l'exercice suivant, on définit l'ensemble de Cantor triadique C comme le sous-ensemble de $[0, 1]$ qui reste après avoir successivement enlevé l'intervalle $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, puis les 2 intervalles $(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2})$ et $(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2})$, puis les 4 intervalles

$$\left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right), \quad \left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right), \quad \left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right), \quad \left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right),$$

et ainsi de suite.

(i) Donner une définition plus formelle de C .

(ii) Montrer que C est compact et de mesure de Lebesgue nulle.

(iii) Pour $x \in [0, 1]$, on montre qu'il existe une suite $(\alpha_n)_n \subset \{0, 1, 2\}$ telle que les α_n ne sont pas tous égaux à 2 à partir d'un certain rang, et telle que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}.$$

On note $x = 0 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots$ (développement de x en base 3).

(iv) Montrer que $C \supset \{x \in [0, 1] ; x = 0 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \text{ avec } \alpha_n \in \{0, 2\}\}$. En déduire que C n'est pas dénombrable.

Exercice 5. Le but de cet exercice est d'exhiber un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ Lebesgue-mesurable et non borélien. Pour ce faire, on définit une fonction f de $[0, 1[$ dans l'ensemble de Cantor C (voir exercice précédent), de la façon suivante. Si

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

où $a_n \in \{0, 1\}$ pour tout n , les a_n n'étant pas tous égaux à 1 à partir d'un certain rang, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}.$$

(i) Montrer que f est strictement croissante mais n'est pas continue.

(ii) Soit $A \subset [0, 1[$ non mesurable au sens de Lebesgue. Montrer que $f(A)$ est Lebesgue-mesurable mais non borélien.