

Titulaire : Mitia Duerinckx
 Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices de Théorie de la mesure - 2025/2026

Séance 5 – Intégrale de Lebesgue

Exercice 1. On considère les fonctions

$$f_1(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0, \\ \ln |x| & \text{si } 0 < |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$f_2(x) \equiv 1.$$

Déterminer si ces fonctions sont intégrables sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par rapport à la mesure m , dans les deux cas suivants :

- (i) $m = \lambda$ est la mesure de Lebesgue ;
- (ii) $m = \nu$, qui est définie par

$$\nu(B) = m \sum_{n \in B \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + (n + 1)^2}$$

pour tout borélien B .

Exercice 2.

- (i) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx$ est convergente.
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) := x^2 \sum_{k=1}^n e^{-kx}$. Calculer la limite de la suite $(f_n(x))_n$.
- (iii) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx = \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

- (iv) Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}$$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |\cos(t)|^{\frac{1}{n}} dt$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{n}\right)}{x^2} dx$

- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{nk^2+k+1}$
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin(k)}{k^2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(nx^{\frac{1}{2}})}{nx^{\frac{1}{2}+1}} dx$
- (vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+|t|^{2+\frac{1}{n}}}$
- (vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx$
- (viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$

Exercice 4. Soit f définie sur $[0, 1)$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

Montrer que f est borélienne et que $\mathcal{L}(f^{-1}(E)) = \mathcal{L}(E)$ pour tout $E \subset [0, 1)$ mesurable.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable tel que $\int_X |f(x)| \mu(dx) < +\infty$.

- (i) Montrer que la fonction définie par

$$F(y) := \int_{\mathbb{R}} |f(x) - y| \mu(dx)$$

est 1-lipschitzienne et convexe.

- (ii) Montrer que F est dérivable en tout point y de $\mathbb{R}$ tel que $\mu(\{x : f(x) = y\}) = 0$, et que

$$F'(y) = 2\mu(\{f \leq y\}) - 1$$

- (iii) On suppose que pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x : f(x) = y\}$ est de mesure μ nulle. Montrer que que l'ensemble des points où F atteint son minimum est l'intervalle

$$\{y \in \mathbb{R} : \mu(\{f \leq y\}) = \frac{1}{2}\}$$

Exercice 6. Soit $E \subset [0, 2\pi]$ mesurable avec mesure de Lebesgue $\mathcal{L}(E) = \gamma$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a l'inégalité

$$\int_E |\cos(nx)| dx \geq \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{8}$$

Question de réflexion : L'introduction de l'intégrale de Lebesgue est motivée (entre autres) par ses propriétés de passage à la limite sous le signe intégral et par sa généralité (on peut penser p.ex. aux séries,...). On a aussi vu que l'intégrale de Lebesgue généralise l'intégrale de Riemann. Les nouveaux concepts de la théorie semblent à première vue peut-être techniques. Pour comprendre mieux, il est parfois bien de faire un pas en arrière et d'essayer d'obtenir une vue générale ou globale de ce qu'on fait, sans penser trop aux détails. Cela peut rendre les outils beaucoup plus naturels. Posez vous des questions basiques : pourquoi une nouvelle intégrale, quelles étaient les failles de l'intégrale de Riemann ? En quoi l'intégrale de Lebesgue résout ces problèmes ? Quelle est la différence entre une fonction en escalier et une fonction simple et pourquoi cette différence rend l'intégrale de Lebesgue plus forte ? Quels sont les outils clés de la théorie ?...