Titulaire : Mitia Duerinckx
Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices de Théorie de la mesure - 2025/2026

Séance 4 – Comparaison entre les intégrales de Riemann et Lebesgue

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier si il existe une famille finie $(a_k, I_k)_{k\leq N}$ telle que $a_k \in \mathbb{R}$, A_k est un interval et

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}.$$

Étant donné une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **bornée**, on dit que f est *intégrable au sens de Riemann* sur $[a,b]$ lorsque

$$\underline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx = \overline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx \quad \Big(\overset{\text{déf}}{=} (R)\int_a^b f(x)\,dx\Big),$$

où

$$\underline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx = \sup\Big\{\int_a^b \psi(x)\,dx\,;\ \psi \text{ en escalier et } \psi \leq f \text{ sur } [a,b]\Big\},$$
$$\overline{\int_{[a,b]}} f(x)\,dx = \inf\Big\{\int_a^b \varphi(x)\,dx\,;\ \varphi \text{ en escalier et } f \leq \varphi \text{ sur } [a,b]\Big\}.$$

On pose, pour tout $x \in [a,b]$, $\underline{f}(x) = \lim_{\delta\to 0^+} I_\delta(x)$ et $\overline{f}(x) = \lim_{\delta\to 0^+} S_\delta(x)$, avec

$$I_\delta(x) = \inf\{f(y)\,;\ y \in [a,b], |y-x| < \delta\},$$
$$S_\delta(x) = \sup\{f(y)\,;\ y \in [a,b], |y-x| < \delta\}.$$

Prenons pour commencer $[a,b] = [0,1]$. Montrer que

(1) pour tout $x \in [0,1]$, $I_\delta(x)$ est une fonction décroissante de δ, tandis que $S_\delta(x)$ est une fonction croissante de δ ;

(2) $\underline{f}$ et $\overline{f}$ sont bien définies et $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$ sur $[0,1]$;

(3) il existe une suite de fonctions ψ_n en escalier, inférieures à f sur $[a,b]$ pour tout n, et convergeant vers $\underline{f}$ en tout point de $[a,b] \setminus M$, où M est au plus dénombrable ;

(4) $\underline{f}$ est borélienne et

$$(L)\int_0^1 \underline{f}(x)\,dx = \underline{\int_{[0,1]}} f(x)\,dx\,;$$

(5) il existe une suite de fonctions φ_n en escalier, supérieures à f sur $[0,1]$ pour tout n, et convergeant vers $\overline{f}$ en tout point de $[0,1] \setminus M'$, où M' est au plus dénombrable ;

(6) $\overline{f}$ est borélienne et

$$(L)\int_a^b \overline{f}(x)\,dx = \overline{\int}_{[0,1]} f(x)\,dx\,;$$

(7) f est int_R ssi $\underline{f} = \overline{f}$ presque partout sur $[0,1]$;

(8) si f est intégrable au sens de Riemann, alors f est intégrable au sens de Lebesgue et

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx = (R)\int_0^1 f(x)\,dx\,;$$

(9) f est intégrable au sens de Riemann ssi f est mesurable et l'ensemble de points de discontinuité de f est négligeable (aide : on observe que f est continue au point x ssi $\underline{f}(x) = \overline{f}(x) = f(x)$) — c'est le théorème de Lebesgue-Vitali ;

(10) la fonction de Dirichlet $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ sur $[0,1]$ n'est pas intégrable au sens de Riemann, mais coïncide presque partout avec une fonction continue.

(11) Généralisez au interval $[a,b]$