

Titulaire : Mitia Duerinckx
 Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices de Théorie de la mesure - 2025/2026

Séance 3 – Intégrale abstraite de Lebesgue

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure, soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable et soient $A, B \in \mathcal{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$.

Exercice 2. Soient $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$, $n = 1, 2, 3, \dots$ des fonctions mesurables telles que

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots \geq 0.$$

On définit $f(x)$ comme la limite des $f_n(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, pour chaque $x \in X$. Montrer que, si $f_1 \in L^1(\mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Donner ensuite un contre-exemple montrant que la conclusion est erronée si on enlève l'hypothèse $f_1 \in L^1(\mu)$.

Exercice 3. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0, n]}$ et $g_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$. Montrer que f_n et g_n convergent λ -pp vers 0 et que $\int f_n d\lambda = \int g_n d\lambda = 1$. Pourquoi cela ne contredit pas Bepo-Levi ?

Exercice 4. Supposons $\mu(X) < \infty$. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables sur X et telles que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur X . Montrer que si $f_n \in L^1(\mu)$ pour tout n , alors

$$f \in L^1(\mu) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Montrer ensuite que l'hypothèse $\mu(X) < \infty$ est nécessaire.

Exercice 5. Soit $f \in L^1(\mu)$. Montrer que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\int_A |f| d\mu < \epsilon$ si $\mu(A) < \delta$.

Exercice 6. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure, soit Y un ensemble, et soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction.

- (i) Montrer que $f_*\mathcal{A} := \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$ est une σ -algèbre sur Y , qu'on appelle la σ -algèbre image de $\mathcal{A}$ par f .
- (ii) Si Y est muni d'une σ -algèbre $\mathcal{A}'$ et si f est $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ -mesurable, montrer que $f_*\mathcal{A} \supset \mathcal{A}'$.
- (iii) Montrer que l'application $f_*\mu : f_*\mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ définie par $f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ est une mesure sur $f_*\mathcal{A}$, qu'on appelle la mesure image de μ par f .

(iv) Montrer que pour toute fonction $f_*\mathcal{A}$ -mesurable $h : Y \rightarrow [0, \infty]$ on a

$$\int_Y h d(f_*\mu) = \int_X (h \circ f) d\mu.$$

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. On appelle variable aléatoire une fonction mesurable $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle espérance de Z l'intégrale $\mathbb{E}[Z] = \int_{\Omega} Z d\mathbb{P}$, si Z est intégrable. On appelle loi ou distribution de Z la mesure image $\mathbb{P}_Z := Z_*\mathbb{P}$, qui est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_Z(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in A\}).$$

Avec cette terminologie, le résultat du point (iv) ci-dessus signifie

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{\mathbb{R}} z d\mathbb{P}_Z(z).$$

Exercice 7 (Somme par tranches). Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable positive. Montrer que

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^n} \mu\left(\left\{f > \frac{k}{2^n}\right\}\right).$$