

Titulaire : Mitia Duerinckx
 Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices de Théorie de la mesure - 2025/2026

Séance 2 – Fonctions mesurables

Exercice 1. Soit f une fonction réelle sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Montrer que si f est telle que $\{x \in X : f(x) > r\}$ est mesurable pour tout r rationnel, alors f est mesurable.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ -mesurables. Montrer que $E := \{x \in X / g(x) \neq 0\}$ appartient à $\mathcal{A}$ et que la fonction $f/g : E \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{A}_E$ -mesurable.

Exercice 3. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{ailleurs;} \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrer que f et g sont boréliennes.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ des fonctions $\mathcal{A}$ -mesurables. Montrer que $\log(1 + |f|e^g)$ est aussi $\mathcal{A}$ -mesurable.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $T \subset X$. On rappelle la définition de la σ -algèbre restreinte $\mathcal{A}_T := \{A \cap T : A \in \mathcal{A}\}$.

- (i) Si $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est $\mathcal{A}$ -mesurable, montrer que la restriction $f|_T$ est $\mathcal{A}_T$ -mesurable
- (ii) Si $g : T \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est $\mathcal{A}_T$ -mesurable, montrer qu'il existe une extension $\hat{g} : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ qui est $\mathcal{A}$ -mesurable.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne et soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus D$, où D est un ensemble dénombrable. Montrer que g est borélienne.

Exercice 7. Vrai ou Faux ?

- (i) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est mesurable. Alors f est mesurable.
- (ii) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $|f|$ est mesurable. Alors f est mesurable.
- (iii) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors, $g \circ f$ est mesurable.

(iv) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue presque partout, alors f est mesurable.

Exercice 8. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens :

1. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \rightarrow 0\right\},$
2. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \text{ converge vers un réel}\right\}.$

Exercice 9. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilités et soit $T : X \rightarrow X$ une application mesurable telle que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ (on dit que μ est T -invariante, et que le quadruplet $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est un *système dynamique*). Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $x \in X$, on dit que x est A -récurrent si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in A\}$ est infini, et on notera $\hat{A} \subset A$ l'ensemble des points A -récurrents.

1. Vérifier que pour tout n l'itérée

$$T^n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fois}}$$

est mesurable et que μ est T^n -invariante.

2. Montrer que $\hat{A} = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} (T^k)^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.
3. Notons $B_n := \bigcup_{k \geq n} (T^k)^{-1}(A)$. Montrer que $\mu(B_n) = \mu(B_{n+1})$ pour tout n .
4. En déduire que $\mu(A \setminus B_n) = 0$ pour tout n .
5. Conclure que $\mu(A \setminus \hat{A}) = 0$. En d'autres termes, presque tous les points de A sont A -récurrents : c'est le théorème de récurrence de Poincaré. Que cela signifie-t-il physiquement ? Comparer au second principe de la thermodynamique.

Exercice 10. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure fini. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction réelle mesurable, avec $f_n \rightarrow f$ μ -presque partout.

— Montrer que pour tout $k \geq 1$, et pour tout $\eta > 0$, il existe $n > 0$ tel que

$$\mu \left(\bigcup_{j \geq n} \left\{ x \in X \mid |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) \leq \eta.$$

- En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $X \setminus A$.
- Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = \infty$.
- *Une application :* Une suite de fonction mesurable $(f_n)_n$ de $X \rightarrow \mathbb{R}$ converge en mesure vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

Montrer que si $\mu(X) < \infty$ et (f_n) converge μ -pp vers f , alors f_n converge en mesure vers f .

Exercice 11 (Exemple d'ensembles non mesurable). Soit $\sim$ la relation d'équivalence définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, x = y + q.$$

On forme l'ensemble V en prenant un représentant de chaque classe d'équivalence de $\sim$ dans $[0, 1]$. L'ensemble V intersecte donc chaque classe d'équivalence de $\sim$ en un unique point.

Montrer que V n'est pas mesurable.