

Titulaire : Mitia Duerinckx
 Assistant : Corentin LeBihan

Exercices de Théorie de la mesure - 2025/2026

Séance 11 – Théorème de Radon-Nikodym

Exercice 1 (Contre-exemple : Radon-Nikodym). Soit $\sharp$ la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- (i) Montrer que la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}$ est absolument continue par rapport à $\sharp$.
- (ii) Montrer qu'il n'existe pas de fonction positive mesurable f telle que $d\mathcal{L} = f d\sharp$.
- (iii) Ceci contredit-il le théorème de Radon-Nikodym ?

Exercice 2. Soient μ et ν des mesures sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.

- (i) On suppose que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a

$$\mu(A) \leq \eta \Rightarrow \nu(A) \leq \epsilon.$$

Montrer qu'alors ν est absolument continue par rapport à μ .

- (ii) Montrer que la réciproque de la propriété en (i) est vraie dans le cas où la mesure ν est finie.
- (iii) Que se passe-t-il si ν n'est pas finie ?

Exercice 3. Soit μ une mesure σ -finie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Montrer qu'il existe une mesure finie ν sur $(X, \mathcal{A})$ telle que $\mu \equiv \nu$, c'est-à-dire telle que $\mu \ll \nu$ et $\nu \ll \mu$.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient λ, μ, ν des mesures σ -finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que $\nu \ll \mu \ll \lambda$.

- (a) Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est μ -intégrable, montrer que

$$\int f d\mu = \int f \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$$

- (b) Montrer que

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} \quad \lambda\text{-p.p.}$$

- (c) Si on a aussi $\mu \ll \nu$, montrer que

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu} \right)^{-1} \quad \mu, \nu\text{-p.p.}$$

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure et soit famille $(\nu_n)_n$ une suite de mesures sur $(X, \mathcal{A})$. On suppose que $(\nu_n)_n$ est *absolument équicontinue* par rapport à μ , c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty \text{ tel que } \nu_n(A^c) < \epsilon \quad \forall n; \\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \mu(A) < \delta \text{ implique } \nu_n(A) < \epsilon \quad \forall n. \end{cases}$$

On suppose également que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est un ensemble de parties de X stable par intersection finie et contenant X , et que pour tout $C \in \mathcal{C}$ la suite $(\nu_n(C))_n$ converge dans $\mathbb{R}^+$.

(i) Considérons l'ensemble

$$\mathcal{B} := \left\{ A \in \mathcal{A} : \lim_n \nu_n(A) \text{ existe dans } \mathbb{R}^+ \right\}$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par différence propre, c'est-à-dire que $B \setminus A \in \mathcal{B}$ si $A, B \in \mathcal{B}$ et $A \subseteq B$.

- (ii) On considère la fonction $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $\nu(A) = \lim_n \nu_n(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$. Montrer que ν est σ -additive sur $\mathcal{B}$.
- (iii) En déduire $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Ceci montre que $\nu_n(A) \rightarrow \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.
- (iv) Montrer que l'application limite ν est une mesure sur $\mathcal{A}$ et est absolument continue par rapport à μ .

Exercice 6 (Compacité faible en $L^1(\mu)$). Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure σ -fini. On suppose que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe dénombrable stable par intersection finie et contenant X . On considère une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $L^1(\mu)$ qui est :

- tendue (i.e., pour tout $\epsilon > 0$ il existe $F \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(F) < \infty$ et $\int_{F^c} |f_n| d\mu < \epsilon$ pour tout n);
- équi-intégrable (i.e., pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\mu(E) < \delta$ implique $\int_E |f_n| d\mu < \epsilon$ pour tout n);
- bornée dans $L^1(\mu)$.

- (i) Montrer que l'hypothèse sur $\mathcal{A}$ est toujours satisfaite par la σ -algèbre borélienne sur un espace métrique séparable (i.e., sur ce qu'on appelle un espace polonais).
- (ii) Montrer que les hypothèses de tension et d'équi-intégrabilité de $(f_n)_n$ impliquent que la suite de mesures $(|f_n|\mu)_n$ est absolument équicontinue par rapport à μ au sens défini à l'exercice 2.
- (iii) On considère les mesures $\nu_n^\pm := f_n^\pm \mu$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_m})_m \subset (f_n)_n$ telle que $\lim_m \nu_{n_m}^\pm(C)$ existe dans $\mathbb{R}^+$ pour tout $C \in \mathcal{C}$.
- (iv) En utilisant l'exercice 5, montrer qu'il existe $f \in L^1(\mu)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\lim_m \int_A f_{n_m} d\mu = \int_A f d\mu.$$

(v) En déduire que pour tout $g \in L^\infty(X)$ on a

$$\lim_m \int_X f_{n_m} g d\mu = \int_X f g d\mu.$$

On dit que f_{n_m} converge "faiblement" vers f dans $L^1(\mu)$. Pour comparaison, on rappelle le théorème de Vitali montré dans la séance précédente : si en plus la suite $(f_n)_n$ converge vers f en mesure, alors on a la convergence "forte" dans $L^1(\mu)$, i.e. $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.