ULB **Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique**

Titulaire : Mitia Duerinckx
Assistant : Paul Mansanarez

Exercices de Théorie de la mesure - 2024/2025

Séance 10 – Espaces L^p

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure, et p, q deux nombres réels tels que $1 \leq q < p < \infty$.

(i) Si $\mu(X) < \infty$, montrer que pour tout $u \in L^p(X)$, on a

$$\frac{\|u\|_{L^q}}{\mu(X)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\|u\|_{L^p}}{\mu(X)^{\frac{1}{p}}},$$

d'où $L^p(X) \subset L^q(X)$.

(ii) Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u(x) = \begin{cases} (\frac{1}{x})^{\frac{1}{q}} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $u \in L^p(\mathbb{R})$ mais que $u \notin L^q(\mathbb{R})$, et ainsi que $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$v(x) = \begin{cases} (\frac{1}{x})^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $v \in L^q(\mathbb{R})$ mais que $v \notin L^p(\mathbb{R})$, et ainsi que $L^p(\mathbb{R}) \not\supset L^q(\mathbb{R})$.

(iv) A-t-on $L^q(\mathbb{R}) \supset L^\infty(\mathbb{R})$? Et $L^q(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$?

(v) A-t-on $\cap_{1 \leq r < \infty} L^r(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$? Et que se passe-t-il si $\mathbb{R}$ est remplacé par un sous-ensemble compact ?

Exercice 2. Soit $1 \leq p < \infty$. Construire une fonction mesurable f sur $\mathbb{R}$ telle que $f \in L^p(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^q(\mathbb{R})$ pour tout $q \neq p$.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure. Montrer que l'application $p \mapsto \|\cdot\|^p_{L^p(\mu)}$ est log-convexe, c'est-à-dire que pour tout $1 \leq p, q < \infty$, toute fonction mesurable $u : X \to \mathbb{R}$, et tout $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\|u\|^{\theta p + (1-\theta)q}_{L^{\theta p + (1-\theta)q}} \leq \|u\|^{\theta p}_{L^p} \|u\|^{(1-\theta)q}_{L^q}.$$

Déduire que pour tout $p \leq q$ on a $\cap_{r \in [p,q]} L^r(X) = L^p(X) \cap L^q(X)$. En particulier, si u est mesurable sur X, l'ensemble $\{p \in [1, \infty] : u \in L^p\}$ est convexe (donc un intervalle). En examinant les exercices précédents, montrer que n'importe quel sous-ensemble convexe de $[1, \infty]$ peut être obtenu de cette façon.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure tel que $\mu(X) < +\infty$, soit $1 \leq q < \infty$, et soit $f \in L^q(\mu)$. On souhaite montrer que

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p(\mu)} = \|f\|_{L^\infty(\mu)}$$

(i) Montrer que pour tout $t > 0$ on a

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \geq t\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq t\})^{\frac{1}{p}}$$

(ii) En déduire que

$$\liminf_p \|f\|_{L^p(\mu)} \geq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$$

(iii) Conclure.

Exercice 5 (Réciproque du théorème de convergence dominée)**.**

(i) Montrer que la réciproque du théorème de convergence dominée de Lebesgue est fausse. (*Aide :* pour $X = [0, \infty)$ muni de la mesure de Lebesgue, considérer par exemple la suite des fonctions $f_n = 1_{[b_{n-1}, b_n)}$ avec $b_n = \sum_{k=1}^n 1/k$.)

(ii) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure, soit $1 \leq p \leq \infty$, et soit $(f_n)_n \subset L^p(\mu)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^p(\mu)$. En utilisant la démonstration de la complétude de $L^p(\mu)$, montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_m})_m \subset (f_n)_n$ et $h \in L^p(\mu)$ tels que $f_{n_m} \to f$ p.p. et $|f_{n_m}| \leq h$ p.p. pour tout m.

On conclut que la réciproque du théorème de convergence dominée de Lebesgue est fausse mais est vraie à sous-suite près.

Exercice 6. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure, soit $1 \leq p < \infty$, et soient $(f_n)_n \subset L^p(\mu)$ et $f \in L^p(\mu)$ tels que $f_n \to f$ p.p. Montrer l'équivalence

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\mu)} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p(\mu)} = \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Montrer que ceci est faux pour $p = \infty$.

Exercice 7. Soit $1 < p < \infty$. À toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, on associe la fonction F définie sur $(0, \infty)$ par $F_f(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(i) Justifier que F_f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ satisfait

$$\int_0^\infty F_f(x)^p\,\mathrm{d}x = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty f(x)F_f(x)^{p-1}\,\mathrm{d}x$$

d'où l'on déduit *l'inégalité de Hardy*

$$\|F_f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}. \tag{H}$$

(ii) Montrer que l'inégalité de Hardy (H) est aussi satisfaite par toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

(iii) Montrer que la constante $\frac{p}{p-1}$ dans (H) est optimale.

(iv) Etudier les cas $p = 1$ et $p = +\infty$.

(v) Soit r dans $]-\infty, p-1[$. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_+)$ vérifie

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p x^r \,\mathrm{d}x = \frac{p}{p-r-1} \int_0^{+\infty} f(x) F(x)^{p-1} x^r \,\mathrm{d}x$$

En déduire que toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ Lebesgue-mesurable vérifie l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p x^r \,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{p}{p-r-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f(x)^p x^r \,\mathrm{d}x$$

Exercice 8. On considére l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f dans $L^1(\lambda)$ ou borélienne positive, et pour tout h dans $\mathbb{R}_0^+$, on définit

$$M_h(f)(x) := \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que, pour toute fonction f dans $L^1(\lambda)$, et pour tout h dans $\mathbb{R}_0^+$,

$$\|M_h(f)\|_{L^1(\lambda)} \leq \|f\|_{L^1(\lambda)}$$

2. Soit f dans $L^1(\lambda)$. Montrer qu'on a

$$M_h(f) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f$$

dans $L^1(\lambda)$.

Exercice 9. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, p et q dans $[1, +\infty[$, ainsi que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\exists c \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |g(y)| \leq c|y|^{\frac{p}{q}} \tag{$\star$}$$

On considère l'application

$$\Phi : \begin{pmatrix} L^p(\mu) & \longrightarrow & L^q(\mu) \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'application Φ est bien définie.
2. Montrer que l'application Φ est continue.
3. On considère ici $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si la fonction g ne vérifie pas $(\star)$ alors il existe $f \in L^p(\lambda)$ tel que $\Phi(f) \notin L^q(\lambda)$.

Exercice 10. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, p dans $]1, +\infty[$ et q dans $]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On considère une forme linéaire continue positive $\Phi : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire tel qu'il existe $C_\Phi \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall f \in L^p(\mu), \quad \big(|\Phi(f)| \leq C_\Phi \|f\|_{L^p(\mu)}\big) \wedge (f \geq 0 \Rightarrow \Phi(f) \geq 0)$$

On se fixe une suite d'éléments (F_n) deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$ tels que

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} F_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \mu(F_n) < +\infty$$

On pose $E_n := \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, pour tout n dans $\mathbb{N}_0$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $A \in \mathcal{A}$, on définit $\nu_n(A) := \Phi(\mathbb{I}_{A\cap F_n})$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, v_n est une mesure finie, absolument continue par rapport à μ.
2. En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}_0$, il existe $g_n \in L^1(\mu)$, nul en dehors de F_n, tel que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \nu_n(A) = \int_A g_n(x)\,\mu(\mathrm{d}x)$$

3. Soit f une fonction de $L^p(F_n, \mu)$ à valeurs positives. Montrer

$$\Phi(f) = \int_X f(x) g_n(x)\,\mu(\mathrm{d}x)$$

4. Soit $f \in L^p(\mu)$ à valeurs positives. Montrer que la série $\sum f\mathbb{I}_{F_n}$ converge vers f μ-presque partout sur X. En déduire que cette convergence a aussi lieu dans $L^p(\mu)$.
5. On note $g := \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$. Montrer que g définit bien une fonction, et montrer que pour toute fonction f positive dans $L^p(\mu)$, on a

$$\Phi(f) = \int_X f(x) g(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \tag{1}$$

6. En déduire que (1) est vrai pour toute fonction f dans $L^p(\mu)$.
7. En considérant la double-suite $(f_{n,m})$ définie par

$$f_{m,n} := \mathrm{sgn}(g) g^{q-1} \mathbb{I}_{E_n \cap \{g \le m\}}$$

pour tous n, m dans $\mathbb{N}_0$, montrer qu'on a

$$\forall (n,m) \in (\mathbb{N}_0)^2, \quad \left(\int_{E_n} |g(x)|^q \mathbb{I}_{\{g\le m\}}(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \right)^{1-\frac{1}{p}} \le C_\Phi$$

8. En déduire $g \in L^q(\mu)$ et $\|g\|_{L^q(\mu)} \le C_\Phi$.

Exercice 11. Soient p, q et r des éléments de $[1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient f dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et g dans $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est dans $\mathcal{L}^r(\mathbb{R})$ et qu'on a

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$$