

Titulaire : Mitia Duerinckx
 Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices de Théorie de la mesure - 2025/2026

Séance 1 – σ -algèbres et mesures

Exercice 1. Montrer qu'une union de σ -algèbres n'est pas forcément une σ -algèbre.

Exercice 2. Sur $X = \{0, \dots, n\}$, $n \geq 2$, on considère $\mathcal{A} = \{\{0\}\}$ et $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Décrire la σ -algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ et celle engendrée par $\mathcal{B}$.

Exercice 3. Soit X un ensemble infini. Décrire la σ -algèbre engendrée par l'ensemble des parties finies de X . Que peut-on dire si X est dénombrable ?

Exercice 4. Soient X un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. Montrer que pour tout $B \in \sigma(\mathcal{C})$ il existe un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}$ tel que $B \in \sigma(\mathcal{C}_B)$.

Exercice 5. Une σ -algèbre $\mathcal{A}$ est dite *dénombrablement engendrée* s'il existe un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Montrer qu'une sous- σ -algèbre d'une σ -algèbre dénombrablement engendrée n'est pas forcément dénombrablement engendrée.

Aide : montrer que la σ -algèbre borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est dénombrablement engendrée, et comparer alors la σ -algèbre construite à l'exercice 3 pour $X = \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit X un ensemble.

- (i) Soit $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partition de X , c'est-à-dire une famille de sous-ensembles $E_n \subset X$ tels que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = X$ et $E_n \cap E_m = \emptyset$ pour tous $n \neq m$. Montrer que $\sigma((E_n)_n) = \{\bigcup_{n \in J} E_n : J \subset \mathbb{N}\}$.
- (ii) Si X est dénombrable, montrer que toute σ -algèbre sur X est engendrée par une partition de X comme en (i). *Attention, bien vérifier que les ensembles considérés sont mesurables.*
- (iii) Montrer que le résultat précédent n'est pas vrai si X est non dénombrable.

Exercice 7. Soit X un ensemble non vide et soit $T \subset X$. Pour une collection $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, on note $\mathcal{E}_T := \{A \cap T : A \in \mathcal{E}\}$ la restriction de $\mathcal{E}$ à T .

- (i) Pour tout $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, montrer que $\{A \subset X : A \cap T \in \sigma(\mathcal{E}_T)\}$ est une σ -algèbre sur X , où $\sigma(\mathcal{E}_T)$ est vue comme une σ -algèbre sur T .
- (ii) Pour tout $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, montrer que $\sigma(\mathcal{E}_T) = \sigma(\mathcal{E})_T$.
- (iii) Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble quelconque, qu'on munit de la topologie euclidienne induite. Montrer que la σ -algèbre de Borel de X , définie par $\mathcal{B}(X) := \sigma(\{\text{ouverts de } X\})$, coïncide avec la restriction $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))_X = \{A \cap X : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$.

Exercice 8. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité, c'est-à-dire, un espace de mesure avec $\mu(X) = 1$. Définissons $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une σ -algèbre sur X .

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction additive sur la σ -algèbre $\mathcal{A}$, c'est-à-dire telle que $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ pour tous $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ disjoints. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) μ est σ -additive sur $\mathcal{A}$;
- (ii) lorsque B_n est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$,

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n);$$

On note maintenant

- (iii) lorsque C_n est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$,

$$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n).$$

Donner un exemple d'un espace mesurable et d'une mesure positive $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ qui ne satisfait pas (iii). Dans ce cas, quelle condition supplémentaire faut-il alors ajouter pour que (i) (ou (ii)) implique (iii).

Exercice 10. Considérons l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$, où $\#$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$. Alors, d'une part, on a $\#(A_n) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, puisque $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, on a $\#(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$. Ceci contredit-il la propriété de continuité d'une mesure ?

Exercice 11. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure et soit $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$. On définit

$$\limsup A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k \quad , \quad \liminf A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k$$

- (i) Pour $x \in X$, donner une interprétation de $x \in \limsup A_n$ et $x \in \liminf A_n$.
- (ii) Montrer que $\limsup_n 1_{A_n} = 1_{\limsup_n A_n}$ et $\liminf_n 1_{A_n} = 1_{\liminf_n A_n}$.
- (iii) Dans cette question, on suppose que μ est finie. Montrer les inégalités

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n) \leq \limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n).$$

- (iv) Démontrer le lemme de Borel-Cantelli :

$$\text{Si } \sum_n \mu(A_n) < \infty, \text{ alors } \mu(\limsup_n A_n) = 0.$$

Exercice 12. Question de réflexion : La définition d'une σ -algèbre est conceptuellement similaire à celle d'une topologie. Dans chacun des cas, on donne une structure à un ensemble en déterminant une classe de sous-ensembles, appelés "ouverts" en parlant d'une topologie et "ensembles mesurables" en parlant d'une σ -algèbre. Comparer les objets correspondants dans les deux théories, p.ex *ouvert-ensemble mesurable* ou *fonction continue-fonction mesurable*. Réfléchissez sur les axiomes qui définissent une topologie, resp. une σ -algèbre. Pourquoi ces axiomes-là et pas d'autres ?