Titulaire : André de Laire
Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices d'Analyse fonctionnelle - 2025/2026

Séance 3 – Espaces de Sobolev

Exercice 1. Concidérons $\mathcal{V} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante, à support compact tel que $\mathcal{V}$ strictement positive sur $[0, 2]$. On définit sur $L^2((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)$ l'opérateur Δ_ε par

$$\Delta_\varepsilon f(x) = \int \frac{f(x+\varepsilon k) - f(x)}{\varepsilon^2} \mathcal{V}(k) dk. \tag{1}$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε, et $\varepsilon_0 > 0$ telle que pour tout

$$\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[,\ f \in L^2((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2),\ \left\| f - \int f(y)dy \right\| \leq -C\langle f, \Delta_\varepsilon f\rangle \tag{2}$$

Question préliminaire :

1. Soit $f \in L^2((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)$ tel que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\|f(\cdot + k) - f\| \leq C|k|$ pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de k. Montrer que $f \in H^1((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)$ et que $\varepsilon^{-1}(f(\cdot + \varepsilon k) - f)$ converge faiblement dans $L^2((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)$ vers $k \cdot \nabla f$.
2. On montre maintenant une forme générale du théorème de Rellich-Kondrakov

   Théorème. Soit f_n une suite de $L^2((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)$ vérifiant
   — $\sup_n \|f_n\| < \infty$,
   — $\forall \eta > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\sup_{k:|k|<\delta} \sup_n \|f_n(\cdot + k) - f_n\| < \varepsilon$.
   Il existe une suite strictement croissante (n') telle que $f_{n'}$ soit convergente dans L^2.

   Soit $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, positive, à support compact et vérifiant $\int \rho = 1$. On définit $\rho_K := K^2\rho(K\cdot)$.
   (a) Montrer que $\limsup_{\delta \to 0} \sup_n \|f_n - \rho_K * f_n\| = 0$.
   (b) Montrer que pour $\delta > 0$ fixé, la suite $(\rho_K * f_n)$ est bornée dans L^∞ et Lipschitz (avec des constantes dépendant de δ).

   Déduire qu'il existe une suite strictement croissante n' tel que pour tout $K \in \mathbb{N}$, $\rho_K * f_{n'}$ converge vers un certain f^K.
   (c) Montrer que la suite f^K est de Cauchy, puis que $f_{n'}$ converge vers $\lim_K f^K$.
3. Montrer que pour $f \in \mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)$, $\Delta_\varepsilon f(x) \to c_\mathcal{V} \Delta f(x)$ pour une certaine constante $c_\mathcal{V}$.

On montre maintenant le résultat par l'absurde.

4. On suppose qu'il n'existe pas $C > 0$ tel que (2) soit vérifier. Montrer qu'il existe deux suites $\varepsilon_n \to 0$ et f_n telle que $\int f_n = 0$, $\|f_n\| = 1$ et $-\langle f_n, \Delta_{\varepsilon_n} f_n\rangle \leq \frac{1}{n}$.

5. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite $(f_{n'})$ qui converge faiblement dans L^2 vers un f_∞, avec $\int f_\infty = 0$.
6. Montrer qu'il existe une constant C_1 indépendante de ε telles que pour $\varepsilon' < \varepsilon$, et pour toute fonction test g,
$$-\langle g, \Delta_\varepsilon g\rangle \leq -C\langle g, \Delta_{\varepsilon'} g\rangle.$$
7. Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que pour $k \in B(\frac{1}{2})$, et pour toute fonction test g,
$$\|g(\varepsilon k + \cdot) - g\| \leq -C_2\varepsilon\langle g, \Delta_\varepsilon g\rangle.$$
Ind : pour $k' \in B(\frac{3}{2}) \setminus B(1)$, on a aussi $k - k' \in B(2) \setminus B(\frac{1}{2})$.
8. Montrer que f_n converge fortement, que $f_\infty \in H^1((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)$.
9. Conclure.