Titulaire : André de Laire
Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices d'Analyse fonctionnelle - 2025/2026

Séance 3 – Théorie spectral

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction bornée, on définit $T_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'opérateur multiplication $T_f u = fu$.

1. Montrer que T_f est borné. Montrer que T_f est auto-adjoint si et seulement si f est réelle.
2. Montrer que le spectre $\mathrm{sp}(T_f) = \overline{f(\mathbb{R})}$.
3. Montrer que si $f^{-1}\{\lambda\}$ contient un interval, λ est une valeur propre.
4. Montrer que si f est strictement croissante, f n'a pas de valeur propre.

Exercice 2. On se place dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Soit λ_n une suite bornée de $\mathbb{R}$, et T un opérateur sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définit par

$$T(u_1, u_2, \cdots) = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \cdots).$$

Montrer que T est compact si et seulement si $\lambda_n \to 0$.

Exercice 3. On se place dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Soit $\lambda_n > 0$ une suite telle que $\lambda_n \to \infty$. On pose $V := \{(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \text{ telle que } \sum_n \lambda_n |u_n|^2 < \infty\}$ munit du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_V := \sum_n \lambda_n \bar{u_n} v_n.$$

Montrer que V est un espace de Hilbert et que l'injection $V \hookrightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est compact.

Exercice 4. On pose $E := L^2([0,1])$ avec le produit scalaire usuel, et T définie par

$$(Tu)(x) = \int_0^x u(t)dt.$$

1. Montrer que T est compact. *Ind : Application d'Arzela-Ascoli.*
2. Déterminer $\mathrm{ev}(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T, ainsi que $\mathrm{sp}(T)$ le spectre.
3. Calculer T^*.

Exercice 5. On se place dans $H^1(\mathbb{R})$ avec la norme $\|f\|^2_{H^1(\mathbb{R})} = \int f^2 + (f')^2$. On définit la forme bilinéaire $a(f,g) := f(0)g(0)$.

1. Montrer que a est continue sur $H^1(\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour tout $f \in H^1(\mathbb{R})$, il existe $Tf \in H^1(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall g \in H^1(\mathbb{R}), \langle g, Tf\rangle = a(f,g).$$

   Montrer que $t : f \mapsto Tf$ est linéaire et bornée.

3. Montrer que T est autoadjoint et que ImT est de dimension 1.
4. On note ψ un vecteur propre de T. Montrer que $\psi'' - \psi = 0$ au sens des distributions sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$ (c'est à dire quand on regarde des fonctions tests à supports inclus dans $(-\infty, 0)$ où $(0, \infty)$). Déduire la valeur de ψ en recolant les morceaux.
   Déduire les valeur prorpes de T.

Exercice 6. On se propose de calculer le spectre de ∂_x^2 sur $L^2([0,1])$. On définit (on peut commencer par les définir sur $\mathcal{C}^\infty([0,1])$, puis montrer que l'on peut les étendre par continuité)

$$T_{\text{dirichlet}} f = g \text{ où } -\partial_x^2 g = f,\ g(0) = g(1) = 0$$
$$T_{\text{neuman}} f = g \text{ où } -\partial_x^2 g = f,\ g'(0) = g'(1) = 0,\ \langle g, \mathbf{1}\rangle_{L^2},$$
$$T_{\text{periodic}} f = g \text{ où } -\partial_x^2 g = f,\ g(0) = g(1),\ g'(0) = g'(1),\ \langle g, \mathbf{1}\rangle_{L^2}.$$

Montrer que $T_{\text{dirichlet}}$, T_{neuman} et T_{periodic} sont compacts et auto-adjoints su $L^2([0,1])$. Calculer leur spectre. Que peut-on dire du spectre du Laplacien.

Exercice 7. Soit $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^2$, où $R \in (0,1)$. Soit $u(x) = \ln|\ln(x)|$, $x = (x_1, x_2)$.

1. Montrer que $u \in H^1(\Omega)$. De plus, montrer que $u \in C^2(\Omega \setminus \{0\})$.
2. Montrer que $f(x) = -\frac{1}{|x|^2 \ln^2|x|}$ appartient à $L^1(\Omega)$.
3. Montrer que u est solution au sens des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $-\Delta u = f$.

Exercice 8. On note $\mathbb{R}^d_+ := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{d-1}$ (le demi-espace fermé). On veut construire une application $T : H^1(\mathbb{R}^d_+) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$, $(Tu)_{|\mathbb{R}^d_+} = u$ presque partout.

1. On définit pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d_+)$, l'application T qui a φ associe

$$x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) \text{ si } x_1 \geq 0, \\ \varphi(-x) \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que $\|T\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{2}\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d_+)}$.

2. Montrer que $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d_+)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^d_+)$. *Ind : pour $u \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$, considérez* $u_n = \rho_n * (\mathbf{1}_{x_1>0} u)$.
3. Conclure.