Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique

Titulaire : André de Laire
Assistant : Corentin Le Bihan

Exercices d'Analyse fonctionnelle - 2025/2026

Séance 2 – Topologie faible et faible étoile

Exercice 1. Etudier les bornes et la convergence (forte, faible ou faible-$*$, à extraction près si nécessaire) des suites suivantes dans $L^p([0,1])$ pour $p \in [1,\infty]$ et $H^1([0,1])$:

1. $u_n : x \mapsto \frac{1}{n}\cos n^2 x$,
2. $u_n : x \mapsto (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\cos nx\right)$,
3. $u_n : x \mapsto n \exp\left(-\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{2n}}\right)^2\right)$.

Exercice 2 (Propriété de Banach-Sacks)**.** Montrez que si E est un espace de Hilbert et (u_n) une suite qui converge faiblement vers on peut extraire une sous suite convergent vers u_∞ au sens de Cesàro *on rapelle qu'une suite u converge au sens de Cesàro si la suite* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_n$ *converge.*

Exercice 3. On considère dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$

$$C = \left\{x \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \liminf_n x_n \geq 0\right\}.$$

1. Montrer que C est fortement fermé.
2. Montrer qu'il existe $(u_n) \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \notin C$.
3. On suppose maintenant qu'il existe une suite $(u_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \rightharpoonup u \notin C$.
   (a) Montrez qu'il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et un réel $a > 0$ tel que $\forall k,\ u(\varphi(n)) < -a$.
   (b) Construire $\psi \in (\ell^\infty)'$
   — positive, *id est* $\forall v \in \ell^\infty$ avec $\forall k \in \mathbb{N},\ v(k) \geq 0$, on a $\psi(v) \geq 0$,
   — ψ de norme 1,
   — $\psi(c_0) = \{0\}$, where c_0 is the space of the sequence that converges to 0,
   — $\psi(u) < -a$.
   Ind. : essayez de donner un sens à $\lim_{n\to\infty}\psi_n$ *où* $\psi_n(v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n v(\phi(n))$.
   (c) Montrer que pour tout $v \in C$, on a $\psi(v) \geq 0$

Exercice 4 (Lemme de Schur dans $\ell^1(\mathbb{N})$)**.** L'objectif est de montrer qu'une suite converge fortement dans $\ell^1(\mathbb{N})$ si et seulement si elle converge faiblement. Considérons $(u_n)_n$ une suite de $\ell^1(\mathbb{N})$ convergent faiblement vers 0.

1. Montrez que pour tout k, $\lim_{n\to\infty} u_n(k) \to 0$.
2. Montrez que si $u_n \rightharpoonup 0$ dans $\ell^1(\mathbb{N})$, on peut aussi supposer que $\|u_n\|_{\ell^1} = 1$.

3. Définissez par récurence deux suites croissantes de $\mathbb{N}$, $(a_k)_k$ et $(n_k)_k$, telles que

$$\forall k \geq 0, \quad \sum_{j=a_k}^{a_{k+1}-1} |u_{n_k}(j)| \geq \frac{3}{4}.$$

4. Montrez qu'il existe $v \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ tel que $\langle v, u_{n_k} \rangle_{\ell^2} \geq \frac{1}{2}$ pour tout k. Conclure.

Exercice 5. Le but de cette exercice est montrer par deux méthode différente que $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ l'espace des fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$ n'est pas réflexif.

1. Par compacité.
   (a) On pose $\varphi \in C^0([0,1])^*$, défini par

$$\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f \in C^0([0,1]).$$

   Bornez $\|\varphi\|$.
   (b) Montrez que $|\varphi(f)| < 1$ pour tout $f \in C^0([0,1])$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq 1$.
   (c) Conclure que l'espace $C^0([0,1])$ n'est pas réflexif.
2. par séparabilité.
   (a) Montrer que si E est un Banach et que sont dual est séparable, E^*, alors E est séparable.
   (b) Montrer que $C^0([0,1])$ est séparable.
   (c) Montrer que $C^0([0,1])^*$ n'est pas séparable.
   Ind : Considérez les $\delta_t : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ définis par $\delta_t(f) = f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.
   (d) Conclure que $C^0([0,1])$ n'est pas isomorphe à $C^0([0,1])^{**}$ comme espace de Banach.

Exercice 6 (Téorème de Dunford-Pettis)**.** Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Dunford-Pettis :

> Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble borné et $(f_n)_n$ une suite bornée de $L^1(\Omega)$. Alors on peut extraire un sous suite faiblement convergente de $\{f_n\}$ si et seulement si la suite $(f_n)_n$ est équi-intégrable.

1. Rappeler la définition d'équi-intégrabilité.

Nous commencerons par la réciproque : soit $(f_n)_n$ une suite bornée et équi-intégrable de L^1.

2. Montrez que l'on peut se ramener au cas où les f_n sont positifs.
3. Soit $f_n^k = \mathbf{1}_{f_n \leq k} f_n$. montrez que $\sup_n \|f_n - f_n^k\|_{L^1} \to 0$.
4. Montrez qu'il existe une extraction (n') telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_{n'}^k \rightharpoonup f^k$ in L^1.
5. Montrer que la suite $(f^k)_k$ est croissante et déduire qu'il existe un $f \in L^1$ tel que $f^k \to f$ dans L^1.
6. Conclure que $f_{n'} \rightharpoonup f$ dans L^1.

Traitons maintenant l'implication direct. Soit $(f_n)_n$ une suite borné de $L^1(\Omega)$ satisfaisant $f_n \rightharpoonup f \in L^1(\Omega)$. Considérons $\mathcal{X}$ l'ensemble des fonctions indicatrice et pour un $\varepsilon > 0$, fixé, nous considérons aussi les ensembles X_n définis pour tout $n \geq 0$ par :

$$X_n := \left\{ \mathbf{1}_A \in \mathcal{X} : \forall k \geq n, \ \left| \int_A (f_k - f)\,\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

7. Montrez que $\mathcal{X}$ et X_n sont fermés dans $L^1(\Omega)$.
8. En utilisant un argument à la Baire, montrer que la suite $(f_n)_n$ est équi-intégrable. *Théorème de Baire : l'intersection d'ensembles ouverts denses est dense, union de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide*
9. Conclure.

Exercice 7 (Théorème d'Egorov)**.**

1. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de probabilité, et $(g_n)_n$ une suite de fonction mesurable tel que $(g_n)_n$ p.p. vers une fonction mesurable g. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $E_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\mu(E_\varepsilon^c) < \varepsilon$ et $(g_n)_n$ converge uniformément dans E_ε.
2. Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^1(\Omega)$, avec $f_n \rightharpoonup f \in L^1(\Omega)$, et $(g_n)_n$ une suite bornée de $L^\infty(\Omega)$ satisfaisant $g_n \to g$ p.p. Montrez que $f_n g_n \rightharpoonup fg$ dans $L^1(\Omega)$.
   Ind. : Utilisez le théorème de Dunford-Pettis.

Exercice 8 (Théorème de Clarkson)**.** Un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est dit uniformément convexe s'il satisfait la propriété suivante : Si x_n et y_n sont deux suites contenues dans la boule unitée fermé de E telles que $\|x_n + y_n\| \to 2$, alors $\|x_n - y_n\| \to 0$.

1. Montrez que les Hilbert sont uniformément convexe.
2. Les espaces $L^1(X, \mu)$ et $L^\infty(X, \mu)$ sont-ils uniformément convexe (pour un espace mesuré (X, μ) quelconque) ?
3. On veut montrer le théorème de Clarkson : pour $p \in (1, \infty)$, les espaces $L^p(X, \mu)$ sont uniformément convexe.
   (a) On définie $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \frac{|1+z|^p}{1+|z|^p}$. Montrez que φ est continue, à valeur dans $[0, 2^{p-1}]$ et que $\phi^{-1}(\{2^{p-1}\}) = \{1\}$. Déduisez que pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta(\eta) > 0$ tel que pour x, y dans le disque unité fermé,
   $$|x - y| > \eta \Rightarrow |x + y|^p \leq 2^{p-1}(1 - \delta(\eta))(|x|^p + |y|^p).$$
   (b) Pour $\varepsilon > 0$, considérons $f, g \in L^p$ tels que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. On considère aussi
   $$E := \left\{ x \in X \middle| |f(x) - g(x)| \geq 2^{-\frac{2}{p}} \varepsilon \max(|f(x)|, |g(x)|) \right\}.$$
   Montrez que
   $$\int_{X \setminus E} |f - g|^p d\mu \leq \varepsilon^p / 2,$$
   et en déduire que
   $$\int_X \left| \tfrac{f+g}{2} \right|^p d\mu \leq 1 - \delta\big(\varepsilon 2^{-2/p}\big) + 2^{-p}\varepsilon^p.$$
   Conclure.
4. Le théorème de Millman-Pettis s'applique dans tout espace de Banach uniformément convexe. Commenter ce résultat dans le cadre des questions 2 et 3.