ULB **Université Libre de Bruxelles – Département de Mathématique**

Titulaire : André de Laire
Assistant : Corentin Le Bihan

**Exercices d'Analyse fonctionnelle - 2025/2026**

*Séance 1 – Topologie, espace vectoriel normé, Ascoli et Arzela*

**Exercice 1** (Topologie avec une distance)**.** Soit $(X, d)$ un espace métrique

1. Soit $A$ une partie finie de $X$. Montrer que $A$ est fermée.
2. Montrer que $\bar{A}$ est l'ensemble des points tels que $\inf_{y\in A} d(x, y) = 0$.
3. (a) Montrer que l'application $\bar{d} : X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ défini par
$$\bar{d}(x, y) = \sum_n 2^{-n} \min(1, d(x(n), y(n)))$$
est une distance.
   (b) Une suite $(x^k)_k$ d'éléments de $X^{\mathbb{N}}$ converge vers $x$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^k(n) \to x(n)$ dans $X$.
   (c) Montrer que si $(X, d)$ est complet, alors $(X^{\mathbb{N}}, \bar{d})$ est complet.
   (d) Montrer que si $(X, d)$ est compact, alors $(X^{\mathbb{N}}, \bar{d})$ est compact.
   (e) Montrer que $U \subset X^{\mathbb{N}}$ est ouvert si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe une partie finie $J \subset \mathbb{N}$ et un réel $\alpha$ tel que
$$\forall y \in X^{\mathbb{N}} \left[\forall j \in J,\ d(x(j), y(j)) < \alpha \Rightarrow y \in U\right].$$

**Exercice 2.** On considère l'espace

$$c_0(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\},$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$.

1. Justifier que $c_0(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.
2. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty)$, on a l'injection continue $\ell^p(\mathbb{N}) \hookrightarrow c_0(\mathbb{N})$.
3. Soit $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\ell^p(\mathbb{N})$, pour tout $p \in [1, \infty]$. De plus, montrer que l'adhérence de $F$ pour la norme $\ell^p$ est égal à $\ell^p(\mathbb{N})$, pour tout $p \in [1, \infty[$.
4. Justifier que l'adhérence de $F$ pour la norme $\ell^\infty$ n'est pas égal à $\ell^\infty(\mathbb{N})$, puis montrer que l'adhérence de $F$ pour la norme $\ell^\infty$ est égal à $c_0(\mathbb{N})$.
5. En déduire que $\ell^p(\mathbb{N})$ est séparable si $1 \leq p < +\infty$.

6. On se propose de montrer que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable. Pour cela considérer un ensemble $A = \{a^k : k \in \mathbb{N}\} \subset \ell^\infty$ dénombrable avec $a^k = (a_1^k, a_2^k, \dots)$. Conclure en utilisant la suite
$$b_k = \begin{cases} a_k^k + 1, & \text{si } |a_k^k| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |a_k^k| > 1. \end{cases}$$
7. Montrer $c_0(\mathbb{N})'$ s'identifie avec $\ell^1(\mathbb{N})$.

**Exercice 3** (Un théorème d'Hörmander)**.** Soient $1 \leq p, q < \infty$ et
$$T : (L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p) \to (L^q(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_q),$$
une application continue qui commute avec les translation, *id est* qui vérifie $\tau_h T = T\tau_h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, où $\tau_h f = f(\cdot - h)$. Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant : si $q < p < \infty$, alors $T$ est trivial.

1. Soit $u$ une fonction dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Montrez que $\|u + \tau_h u\|_p \to 2^{1/p}\|u\|_p$ lorsque $\|h\| \to \infty$. *Ind : vous pouvez décomposer $u$ comme somme de fonction à support compact et dont les normes $L^p$ sont arbitrairement faible.*
2. Vérifier que si $C$ est la norme opérateur de $T$, alors pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$,
$$\|Tu\|_q \leq 2^{1/p - 1/q} C \|u\|_p.$$
Concluez.
3. Pouvez-vous donner un exemple d'opérateur non trivial $T$ quand $p \leq q$ ?

**Exercice 4.** Pour $\alpha \in ]0, 1]$, on définit $C^{0,\alpha}([0,1])$ l'espace des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que la norme
$$\|f\|_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \sup_x |f(x)|$$
soit finie.

1. Montrer que $C^{0,\alpha}([0,1])$ est un Banach (est complet pour sa norme).
2. Montrer que pour $\alpha > \alpha'$, l'injection $C^{0,\alpha}([0,1]) \hookrightarrow C^{0,\alpha'}([0,1])$ est compacte (l'image d'un fermé borné est compact).
3. Que se passe-t-il pour $\alpha > 1$.

**Exercice 5** (Un théorème à la Rellich)**.** Considérons $E$ le sous espace de $L^2(\mathbb{R})$ défini par
$$E = \big\{u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \|u\|_E < +\infty\big\}, \quad \text{où} \quad \|u\|_E = \|(\sqrt{1 + x^2})u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$
'objectif de cette exercice est de montrer que la boule unité $B_E$ de $E$ est d'adhérence compact dans$L^2(\mathbb{R})$, où
$$B_E = \big\{u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \|u\|_E \leq 1\big\}.$$
On note par la suite $\phi$ une fonction positive, $\mathcal{C}^\infty$ telles que $\phi^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$ et $\phi^{-1}(\{1\}) = [-1, 1]$.

1. Considérons le cut-off $\phi_R(x) = \phi(x/R)$. Montrez que $\sup_{u \in B_E} \|(1 - \phi_R)u\|_{L^2(\mathbb{R})}$ converge vers 0 quand $R \to +\infty$.
2. On pose $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\|\phi\|_{L^1}\varepsilon}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Montrez que $\sup_{u \in B_E} \|u - u * \psi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})}$ converge vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

3. On pose $\tau_h$ l'opérateur de translation $\tau_h g(x) = g(x+h)$. Montrez que pour tout $R \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, il existe $C_{\varepsilon,R} > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}$ et $u \in E$,

$$\|\tau_h((\phi_R u) * \psi_\varepsilon) - (\phi_R u) * \psi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_{\varepsilon,R}|h|\|u\|_E \quad \text{et} \quad \|(\phi_R u) * \psi_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_{\varepsilon,R}\|u\|_E.$$

4. Montrez que pour toute suite $(u_n)_n$ dans $B_E$, il existe une sous suite $(u_{n'})_{n'}$ telle que pour tout $R, \varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}^*$, la suite $((\phi_R u_{n'}) * \psi_\varepsilon)_{n'}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n' \to \infty$. *Ind : Utiliser un argument diagonal de Cantor.*
5. Conclure.
6. Considérons maintenant $B_{H^1} \subset L^2(\mathbb{R})$ définit par

$$B_{H^1} = \big\{u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1\big\}.$$

Est-ce-que $B_{H^1}$ est d'adhérence compact dans $L^2(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 6** (Espace de suites)**.** Pour $s \in \mathbb{R}$ et $p \in [1, \infty]$, on définit l'espace $w^{s,p}(\mathbb{N})$ comme l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_{s,p} < \infty$, où

$$\|u\|_{s,p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+n)^s |u_n|^p\right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} (1+n)^s |u_n|, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

1. Monter que $w^{s,p}(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.
2. Pour $p < \infty$, montrer que $(w^{s,p}(\mathbb{N}))' \cong w^{-s,p'}(\mathbb{N})$, où $p'$ est défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
3. Montrer que $w^{s,p}(\mathbb{N}) \hookrightarrow w^{s',p'}(\mathbb{N})$ si $\frac{1+s'}{p'} < \frac{1+s}{p}$ ou $p \leq p', s \geq s'$.
4. Montrer que l'on a injection compact si $\frac{1+s'}{p'} < \frac{1+s}{p}$.